REPÚBLICA DE ANGOLA
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Práticas
de sala de aula

Matemática

Título:

Práticas de sala de aula - Matemática

Autores:

Equipa de professores da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
Catarina Delgado
Fátima Mendes
Joana Brocardo
Ana Maria Boavida
José Duarte

Capa e Design Gráfico:

Mário Baía

Impressão:

Setúbal, Portugal

PROJECTO APRENDIZAGEM PARA TODOS
Fundação Calouste Gulbenkian
Banco Mundial
República de Angola

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta publicação tem como objectivo apoiar os professores na sua prática lectiva, focando exemplos concretos de ensino em sala de aula ou de diálogos entre professores.

Cada Prática de Sala de Aula parte de um caso que ilustra dúvidas frequentes de alunos e/ou professores nos temas de Números e Operações e Geometria e Medida. Depois, são apresentadas indicações para o professor preparar uma aula que incida sobre o tema focado e que incluem:

– uma explicação dos aspectos matemáticos e didácticos directamente relacionados com o caso descrito;
– sugestões dirigidas à consulta dos materiais de Matemática produzidos no âmbito do PAT.

Na terceira e última parte de cada Prática, descreve-se detalhadamente uma aula, com duração de 45 minutos, em que o tema em foco é trabalhado com os alunos. Indicam-se perguntas que o professor coloca, dúvidas dos alunos, explicações importantes que o professor dá.

Um dos aspectos focados nesta parte diz respeito ao uso de materiais que possam apoiar a aprendizagem dos alunos. Todos os que são referidos nesta publicação baseiam-se no uso de recursos correntes e que os professores podem reunir com relativa facilidade. Tendo em conta o seu contexto específico, o professor pode adaptar as ideias de materiais que aqui indicamos, recorrendo a outros que podem ter uma função idêntica e que igualmente apoiam a aprendizagem dos alunos. Uma corda com alguns nós ou marcações pode substituir um metro, uma imagem de uma pizza pode ser substituída por um círculo cortado em cartão, as embalagens de sumos e outros produtos correntes podem se associadas a sólidos geométricos, etc.

Estas Práticas de Sala de Aula que entrelaçam conhecimento teórico e prático, reflectem, em grande parte, o conhecimento que professores angolanos e portugueses nos têm permitido construir e que muito agradecemos.

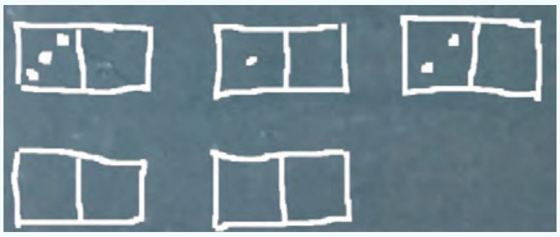
NÚMEROS E OPERAÇÕES

NÚMEROS NATURAIS ATÉ 5

Objectivo: Reconhecer diferentes representações de números até 5 (Compor e decompor números até 5)

Caso

Numa sala de aula da 1.ª classe, no início do ano lectivo, o professor começa a aula desenhando as figuras ao lado e pergunta aos alunos:



***Professor**: Quantas bolinhas estão aqui? (Aponta para o primeiro quadradinho da primeira figura.) Vamos contar!*

O professor inicia a contagem apontando para cada uma das pintas e os alunos acompanham, em coro, a contagem.

***Professor e alunos:** 1, 2, 3 (em coro).*

***Professor:** Qual o número que escrevemos aqui? (Aponta para o segundo quadradinho da primeira figura.)*

***Professor**: 3, não é? (Escreve 3 no quadradinho)*

***Alunos**: Sim… (Respondem em coro)*

O professor e os alunos repetem os mesmos procedimentos em relação aos restantes conjuntos de pintas já representados. Em seguida, o professor pede aos alunos para completarem os seguintes espaços em branco:

$3 = 1 + \square$ $\quad 3 = 2 + \square$ $\quad 3 = \square + \square$ $\quad 3 = \square + \square + \square$

A aula continua com um procedimento idêntico relativo ao número 4.

A PREPARAÇÃO DA AULA

Uma vez que o objectivo da aula é envolver os alunos na composição e decomposição de números e que este objectivo se relaciona directamente com as operações adição e subtracção, sugere-se que o professor, ao preparar a aula, atenda aos aspectos abordados na secção Adição e subtracção (páginas 27 a 32) do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP[1]). Poderá, também, aceder a um conjunto de tarefas-tipo que apoiam a aprendizagem destas operações na secção Adição

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

e subtracção (páginas 170 e 179) do Manual de Avaliação Pedagógica em sala de aula (MAPPEP[2]).

É também importante que o professor reflita sobre os objectivos da tarefa que pretende propor tendo em vista a progressão da aprendizagem dos alunos no que diz respeito aos números e às operações envolvidas. Neste caso concreto, o professor propõe várias situações de decomposição do número 3, logo após ter envolvido os alunos na contagem de elementos de conjuntos com 1, 2 e 3 elementos.

Note-se que é mais fácil para os alunos resolverem situações de composição de números (tais como, 1+2 =____; 2+1= _____ ; 1+1+1= _____) do que de decomposição (tais como, 3=_____+_____; 3=_____+____ + _____). Na composição de números, os alunos adicionam duas quantidades que já conhecem, podendo, por exemplo, contar a partir do primeiro número que está associado à primeira parcela. Na decomposição de um número, os alunos terão de pensar em outros números cuja soma seja esse número, processo que se revela mais complexo, uma vez que tem de pensar em termos de partição de um número.

Numa fase inicial da aprendizagem dos números e das operações, é importante que a composição de números decorra de situações que envolvam juntar conjuntos de objectos e que, em seguida, se determine o número total de objectos. À medida que os alunos resolvem estas situações, o professor deve ir introduzindo as representações simbólicas da adição de números associadas a cada situação.

Como o 5 é um número de referência, é também importante que se comece por propor situações que conduzam à composição e decomposição de números até 5. Em seguida, deve ser realizado um trabalho semelhante com números até 10, até 15 e até 20, sucessivamente. A descrição da aula que se segue exemplifica como este trabalho pode ser feito com números até 5.

A AULA

O professor distribui a cada aluno cinco cubinhos (ou sementes, pedrinhas, pauzinhos ou outros pequenos objectos que tenha em quantidade suficiente para distribuir aos alunos). Em seguida, propõe a resolução de um problema, como se exemplifica a seguir.

A Eunice tem um rebuçado e o Rui tem dois. Quantos rebuçados têm os dois amigos?

Como se trata do início de uma 1.ª classe, há alunos que ainda não sabem ler, pelo que o professor, depois de escrever o problema no quadro, deve lê-lo em voz alta. É fundamental dar algum tempo aos alunos para resolverem o problema e, em seguida, perguntar a diferentes alunos como o resolveram.

Para o resolver há alunos que necessitam de recorrer a materiais manipuláveis (neste caso, os cubinhos) para auxiliar na contagem. Formam dois conjuntos de cubinhos – um com 1 e outro com 2 cubinhos – que representam o número de rebuçados de cada uma das personagens do enunciado do problema. Em seguida, alguns alunos voltam a juntar os cubinhos todos e contam a partir de 1 até chegar a 3 e, outros, iniciam a contagem no número que representa a quantidade de cubinhos de um dos conjuntos e vão adicionando, um a um, os cubinhos do outro conjunto. Há também alunos que poderão não recorrer aos cubinhos, utilizando os dedos para auxiliar a contagem. Recorrendo aos cubinhos ou aos dedos, há alunos que intencionalmente escolhem o número maior para iniciar a contagem. Haverá, eventualmente, outros que já sabem que um mais dois é igual a três (ou seja, já constitui um facto numérico que memorizaram).

[2] Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J., Duarte, J., & Boavida, A. M., (2017). Manual de Avaliação Pedagógica em sala de aula para Professores do Ensino Primário (MAPPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

É importante que os alunos partilhem o modo como resolveram o problema. Por exemplo, os alunos que optaram por juntar os cubinhos todos poderão compreender que bastaria contar a partir de um dos números. Também os alunos que optaram por iniciar a contagem a partir do menor número poderão compreender que é mais rápido iniciá-la a partir do maior.

É importante que o professor, com a ajuda dos alunos, aproveite para representar simbolicamente a situação associada ao problema (1+2=3).

Para além disso, durante a partilha dos vários caminhos que os alunos usaram para resolver o problema, é importante que o professor represente simbolicamente as adições associadas a cada uma das estratégias e dos alunos.

Por exemplo:

– a contagem de um em um, a partir de 1 até ao 3, pode ser associado a 1+1+1=3
– o reconhecimento que adicionar 2 a 1 é o mesmo que adicionar 1 a 2, pode ser representado por 1+2=3 e 2+1=3.

Em seguida, o professor pode propor outro problema que permita fazer emergir composições de outro número até 5. Por exemplo:

O António pescou dois peixes. O amigo Amílcar pescou três peixes. Com quantos peixes ficaram os dois amigos?

Este problema tem associada uma situação em que se juntam duas quantidades já definidas (2 peixes do António e 3 peixes do Amílcar). O número 5 surgirá, naturalmente, como composição dos números 2 e 3 (ou seja: 2+3=5 ou 3+2=5). Seguindo procedimentos semelhantes aos descritos na exploração do problema anterior, poderá surgir, ainda, outra representação do número 5 (1+1+1+1+1=5).

Através de problemas com situações a que os alunos atribuam sentido e que envolvam os números adequados, o professor poderá fazer emergir, naturalmente, diferentes representações dos números até 5 por composição de outros números. Só após a resolução de alguns problemas com estas características, fará sentido propor tarefas, sem contexto, que envolvam a composição e, a seguir, a decomposição de números.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

NÚMEROS NATURAIS ATÉ 10

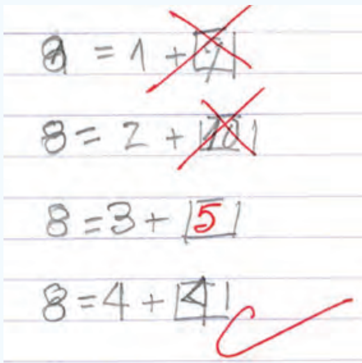
Objectivo – Decompor o número 8

Caso

Numa sala de aula da 1.ª classe a professora escreve no quadro o seguinte:

Completa:

$8 = 1 + \square$ $8 = 2 + \square$ $8 = 3 + \square$ $8 = 4 + \square$



Em seguida, pede aos alunos para preencherem os quadradinhos e, passados cerca de dois minutos, começa a circular pela sala observando os cadernos dos alunos. Coloca ‘certos’ nas respostas certas, uma cruz nas erradas e preenche os espaços vazios nos cadernos dos alunos que ainda não os preencheram. Em seguida, dirige-se ao quadro e preenche os espaços vazios, lendo em voz alta cada uma das igualdades. No final, pergunta aos alunos se perceberam. Em coro, estes respondem afirmativamente.

A PREPARAÇÃO DA AULA

Uma vez que o objectivo da aula é envolver os alunos na decomposição de números e que este objectivo se relaciona directamente com a adição e subtracção, sugere-se que o professor, ao preparar a aula, atenda aos aspectos abordados na secção Adição e subtracção (páginas 27 a 32) do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP). Poderá, também, aceder a um conjunto de tarefas-tipo que apoiam a aprendizagem destas operações na secção Adição e subtracção (páginas 170 e 179) do Manual de Avaliação Pedagógica em sala de aula (MAPPEP).

Para além de reflectir sobre o objectivo da tarefa é também fundamental que o professor pense no modo como pode gerir os vários momentos da aula e tente antecipar algumas dificuldades que virão a ser manifestadas pelos alunos. Ao antecipá-las, poderá pensar em modos de lidar com elas e de ajudar os alunos a ultrapassá-las.

No episódio acima apresentado, os alunos não têm uma participação activa na aula. A professora propõe a tarefa, concede alguns minutos para os alunos a resolverem, verifica quem fez bem e quem fez mal e, em seguida, corrige-a no quadro. Apesar de os alunos responderem, em coro, que compreenderam, muito provavelmente, isto não será verdade para alguns.

A AULA

Depois de propor a tarefa aos alunos é importante que o professor dê tempo suficiente para que estes a resolvam. Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor deverá circular pela sala observando o seu trabalho. O objectivo não é 'corrigir', mas sim identificar quais são as dificuldades dos alunos e, eventualmente, tentar perceber qual a sua origem de forma a poder ajudar a ultrapassá-las.

Por exemplo, na imagem do caderno que consta do episódio, o aluno só conseguiu preencher correctamente a última igualdade. Não consegue preencher a terceira e erra as duas primeiras, colocando 8 =1+9 e 8=2+10. O professor deverá perguntar ao aluno como pensou para preencher os dois primeiros espaços. Muito provavelmente, o aluno fixou-se no sinal de adição e, como este significa adicionar, adicionou 1 ao 8, que é 9, e adicionou 2 ao 8, que é 10. Na verdade, este é um erro muito comum pois, apesar de a expressão ter o sinal de "+", a operação envolvida é a subtracção – determinar o número que se adiciona a 1 para obter 8 corresponde a subtrair 1 de 8.

Para apoiar este aluno o professor poderá recorrer a 8 sementes (ou, pedrinhas, pauzinhos ou outros pequenos objectos), destacar uma e pedir ao aluno para contar as restantes, concluindo que são 7. Do mesmo modo, poderá ajudá-lo a compreender que se de 8 sementes separarmos duas, ficamos com um conjunto com 6 sementes.

A dificuldade manifestada por este aluno dá indícios do tipo de trabalho que ele, e todos os que revelam dificuldades semelhantes, deverão desenvolver futuramente. A proposta de resolução de problemas com o sentido de completar e de comparar poderá ajudar, pois ambos se baseiam no facto de a adição e a subtracção serem operações inversas – conhecendo a soma e uma das parcelas, queremos determinar a parcela que falta (ver página 30 do MMPEP).

As dificuldades manifestadas pelos alunos e, principalmente, o modo como são ultrapassadas, devem também ser partilhadas com toda a turma no momento de discussão da tarefa, pois alunos com a mesma dificuldade poderão conseguir ultrapassá-la. Neste momento, é importante que o professor seleccione também alunos que responderam correctamente e lhes pergunte como pensaram. As suas explicações poderão ajudar outros alunos a compreender aspectos que eventualmente não compreenderam ou a pensar em estratégias diferentes das que eles usaram. Por exemplo, para completar 8=3+___ , há alunos que dizem que é 5 porque contaram a partir do 3 até 8, outros, porque de 8 retiraram 3. Outros, ainda, justificam que se 8-5=3 então 3+5=8, o que envolve o reconhecimento explícito de que a adição e a subtracção são operações inversas.

É natural que alguns alunos tenham dificuldade em explicar que 8=4+4, porque, provavelmente, para estes alunos é já um facto numérico que memorizaram.

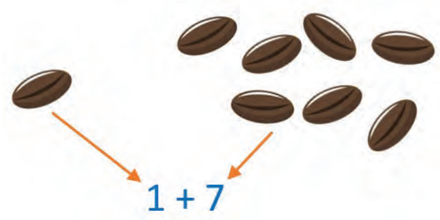
A partilha de modos de resolver esta tarefa permite a explicitação de diferentes estratégias de contagem e da relação inversa entre as operações adição e subtracção.

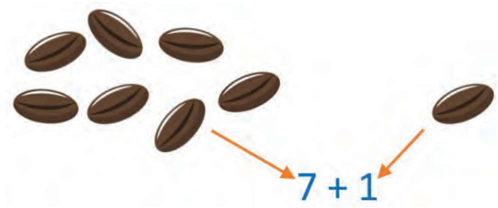
Mantendo como objectivo da aula que os alunos efectuem diferentes decomposições do número 8, o professor pode, a seguir, desafiar os alunos a descobrir todos os pares de números cuja soma seja

8. Aos alunos que revelem mais dificuldades pode-lhes ser fornecidas 8 pedrinhas ou sementes para identificarem as decomposições deste número.

Na sequência do trabalho realizado nesta aula, é natural que alguns alunos, de imediato, identifiquem os três casos que faltam (8=7+1; 8=6+2; 8=5+3), justificando, por exemplo, que se 1+7 é 8 então 7+1 também é 8. Contudo, esta relação poderá não ser compreendida de imediato por outras crianças, pelo que é importante que o professor recorra a outros modos de representação da situação.

Por exemplo, pode recorrer mais uma vez a conjuntos de 8 sementes e subdividi-los, de várias maneiras diferentes, em dois sub-conjuntos, associando-lhes depois os respectivos cardinais. As figuras seguintes exemplificam o caso do 1+7 e de 7+1.





Pode, também, recorrer a esquemas ou tabelas, como as apresentadas na figura ao lado, para representar pares de números que são solução da tarefa.

X	X X X X X X X	1	7
X X	X X X X X X	2	6
X X X	X X X X X	3	5
X X X X	X X X X	4	4
X X X X X	X X X	5	3
X X X X X X	X X	6	2
X X X X X X X	X	7	1

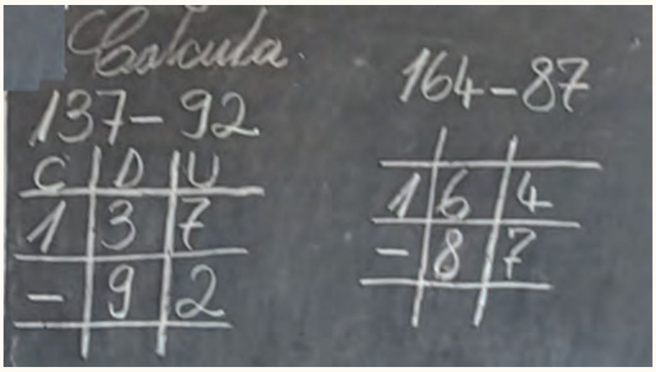
NÚMEROS E OPERAÇÕES

SUBTRACÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Objectivo – Efectuar cálculos usando o algoritmo da subtracção (operação armada)

Caso

Numa sala de aula da 3.ª classe, o professor começa a aula escrevendo no quadro o que está representando na figura ao lado.



Em seguida inicia a realização do cálculo 137-92 do seguinte modo:

Professor: *Vamos começar a subtrair das unidades para as centenas. O resultado é para pôr aqui em baixo (aponta para o espaço abaixo do 2). 7 menos 2, dá?*

Alunos*: 5.*

O professor escreve 5 no espaço abaixo do 2.

Professor*: Agora vamos fazer um empréstimo. Vamos tirar de 13 o 9... e dá?*

Alunos*: 4.*

O professor escreve 4 no espaço abaixo do 9.

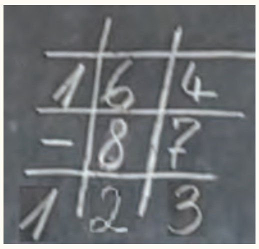
Professor*: A conta acabou porque já tirámos do 13.*

O professor diz aos alunos para fazerem a próxima conta, afirmando:

Professor*: Aqui também temos de fazer empréstimo.*

Passado algum tempo, o professor pergunta quem quer ir ao quadro efectuar o cálculo.

Um aluno oferece-se e faz o que se representa na figura ao lado.



Professor*: Não está correcto! (Apaga o que o aluno fez). Quem quer vir resolver?*

Outro aluno oferece-se e efectua o cálculo no quadro correctamente. O professor afirma que está correcto, pergunta aos restantes alunos se perceberam e, em coro, estes respondem afirmativamente.

A aula continua com a proposta de resolução de um problema de subtracção que envolve uma situação de empréstimo.

A PREPARAÇÃO DA AULA

Uma vez que o objectivo da aula é que os alunos efectuem cálculos recorrendo ao algoritmo da subtracção, é importante que o professor se prepare previamente, lendo as páginas 35 e 36 do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP), nas quais é explicitado o modo como se trabalha o algoritmo da subtracção.

A aprendizagem dos números e das operações não se deve focar no treino e no uso de algoritmos. Um ensino com estas características dificulta a compreensão dos alunos sobre o que os números representam e o desenvolvimento de formas flexíveis de cálculo. Assim, o trabalho em tornos dos algoritmos deve surgir após um longo caminho centrado na compreensão dos números e das operações.

Os algoritmos constituem auxiliares para o cálculo, mas não devem ser usados para efectuar todos os cálculos. Para calcular, por exemplo, 300-245, uma vez que estes números são múltiplos de 5 e são números de referência, os alunos devem recorrer a estratégias de cálculo variadas, baseadas no uso de relações e propriedades matemáticas.

Isto não significa que a aprendizagem dos algoritmos não seja importante e que o professor não possa dedicar algumas aulas ao ensino dos algoritmos, tal como fez o professor do caso de aula que aqui apresentamos.

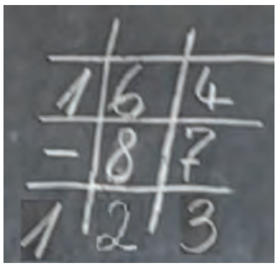
Este professor propõe uma aula centrada na aprendizagem do algoritmo da subtracção com empréstimo. A aprendizagem deste algoritmo constitui, habitualmente, uma dificuldade para os alunos. É importante que o professor conheça essas dificuldades e prepare a aula pensando em modos de ajudar os alunos a ultrapassá-las.

A AULA

Consideremos uma aula em que o professor pretende que os alunos efectuem cálculos usando o algoritmo de uma determinada operação, tal como acontece no caso acima apresentado.

Um aspecto fundamental é, tal como fez o professor do caso que acima se apresenta, dar tempo aos alunos para efectuarem os cálculos. Contudo, perante a apresentação no quadro de um cálculo realizado incorrectamente é importante que o professor solicite ao aluno que explique como pensou. Esta explicação poderá ajudar o professor a identificar o erro que está a ser cometido pelo aluno, de modo a tentar encontrar estratégias que o ajudem a ultrapassá-las. Por vezes, solicitar a outros alunos, que efectuaram correctamente o cálculo, para explicar como procederam ajuda estes alunos a ultrapassar a sua dificuldade. Outras vezes, é necessária a intervenção do professor para apoiar estes alunos.

Analisemos o seguinte cálculo, apresentado no caso acima apresentado, efectuado pelo aluno que errou.



Este aluno, parece subtrair 4 de 7 (que é igual a 3) e, em seguida, 6 de 8 (que é igual a 2). Este erro pode ter origem na ideia, correcta, que no conjunto dos números naturais (incluindo o zero) não é possível subtrair um número maior de um número menor.

Para ajudar este aluno, o professor pode voltar a explicar que:

– Como não se pode subtrair 7 de 4, transformam-se 6 dezenas e 4 unidades em 5 dezenas e 14 unidades;

$$\begin{array}{rrr} 1 & 5 & 14 \\ 1 & \cancel{6} & \cancel{4} \\ - & 8 & 7 \\ \hline & 7 & 7 \end{array}$$

– Como não se pode subtrair 8 de 5, transforma-se 1 centena e 5 dezenas em 0 centenas e 15 dezenas;

$$\begin{array}{rrr} 0 & 15 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & 14 \\ 1 & \cancel{6} & \cancel{4} \\ - & 8 & 7 \\ \hline & 7 & 7 \end{array}$$

Esta explicação não difere muito da apresentada pelo professor do caso inicial a propósito do uso do algoritmo para calcular 137-92. Ainda assim, há alunos que podem necessitar de recorrer a materiais manipuláveis para compreender e dar sentido aos procedimentos associados a este algoritmo.

O professor poderá usar o MAB (palhinhas ou pequenos paus e vários elásticos) para ajudar os alunos a compreender as eventuais transformações de centenas em dezenas e de dezenas em unidades. Vejamos como podem ser usados os pequenos paus em substituição do MAB.

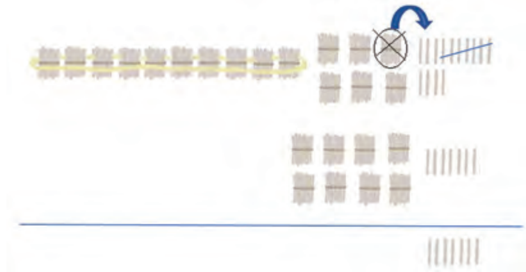
O professor começa por representar os números 164 e 87 com os paus e, à medida que vai necessitando de efectuar transformações no algoritmo, vai concretizando com o material.

– Representação dos números envolvidos no cálculo:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 6 & 4 \\ - & 8 & 7 \\ \hline \end{array}$$

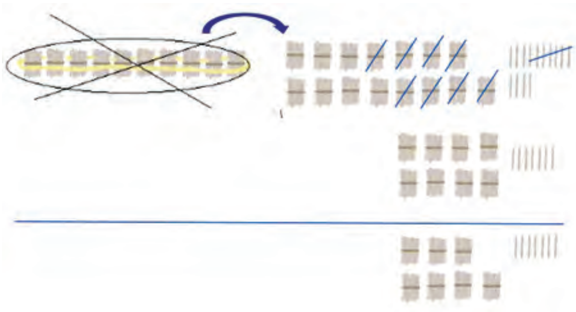
– Transformação de uma dezena em dez unidades:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 5 & 14 \\ 1 & \cancel{6} & \cancel{4} \\ - & 8 & 7 \\ \hline & & 7 \end{array}$$



– Transformação de uma centena em dez dezenas:

$$\begin{array}{rrr} 0 & 15 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & 14 \\ 1 & \cancel{6} & \cancel{4} \\ - & 8 & 7 \\ \hline & 7 & 7 \end{array}$$



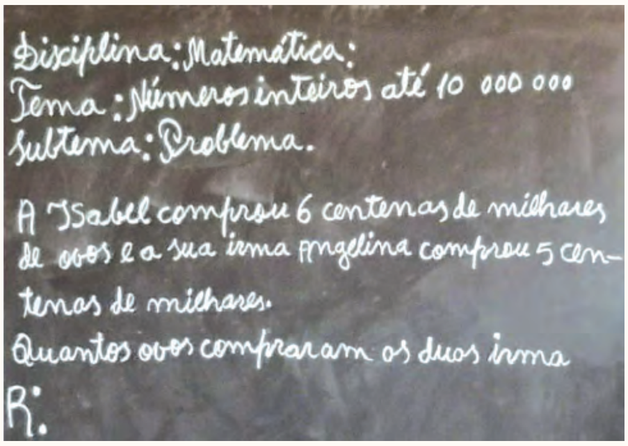
NÚMEROS E OPERAÇÕES

NÚMEROS INTEIROS ATÉ 10000

Objectivo – Dar sentido e operar com números até 10000

Caso

Numa sala de aula da 3.ª classe, com 72 alunos, a professora copia um problema do seu manual para o quadro, pois a maioria dos alunos não tem manual.



A Isabel comprou 6 centenas de ovos e a sua irmã Angelina comprou 5 centenas de ovos. Quantos ovos compraram as duas irmãs?

Em seguida todos lêem o problema em coro e os alunos copiam o problema para o seu caderno. Depois de os alunos passarem o enunciado para o caderno, a professora começa a resolver o problema no quadro. Chama a atenção que o problema é de adição e efectua o cálculo seguinte:

6+5=11 centenas

Enquanto os alunos copiam o registo do quadro novamente para o caderno, a professora circula entre as cadeiras, assegurando-se que todos cumprem a tarefa proposta. Depois escreve no quadro a resposta ao problema

R: As irmãs compraram 11 centenas de ovos.

No final, pergunta aos alunos se perceberam. Em coro, estes respondem afirmativamente.

A PREPARAÇÃO DA AULA

Uma vez que o objectivo da aula é dar sentido a números até 10000 e ser capaz de efectuar cálculos com estes números é importante que o professor se prepare previamente, lendo o capítulo *Número e valor de posição* (páginas 7 a 23) do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP[1]).

É importante depois pensar antecipadamente em situações do dia-a-dia dos alunos ou situações que compreendam facilmente, em que surgem números ‘grandes’, de modo a que estes façam sentido

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

para eles. Por exemplo:

– Será que um saquinho de ginguba tem 1000 gingubas? Ou mais de 1000? Investiga[2].
– Tens ideia de quantos dias já viveste? Menos de 1000 dias, ou mais? Investiga.
– Tens ideia de quantas pessoas vivem na tua aldeia? Mais de 1000 ou menos? Investiga.
– Será que o teu coração já bateu 1000 vezes? Quantas batidas por minuto bate o teu coração? Quanto tempo é necessário para que ele bata 1000 vezes? Investiga (neste caso é preciso um telemóvel ou um cronómetro para medir directamente as pulsações por minuto).

Estes ou outros exemplos próximos da sua realidade, ajudam os alunos a dar significado aos números ´grandes'. É preciso algum cuidado com os contextos que se escolhem para formular problemas. Há muitas situações reais a partir das quais é possível construir problemas interessantes e que sejam desafiantes para os alunos, pelo que não é necessário inventar problemas afastados da realidade, como o do caso que se descreve: não é natural que duas pessoas comuns tenham 600 e 500 ovos.

Uma alternativa próxima do problema apresentado:

Uma padaria precisa de uma grande quantidade de ovos para fazer bolos. Já comprou 6 centenas de ovos e encomendou 5 centenas. Com quantos ovos ficará a padaria?

Para que os alunos resolvam com sucesso um problema com números grandes, devem ser capazes de lidar bem com os números até 100 e, anteriormente, com os números até 20. Por exemplo, adicionar com sucesso 600 com 500 implica saber que 6+5 são 11, porque 6+5=1+5+5=1+10=11 ou então porque se sabe que 6+6=12 e, por isso, 6+5=12-1=11. Este conhecimento estende-se depois às dezenas (60+50=110) e, finalmente, às centenas (600+500=1100). Trata-se de compreender as características do sistema de numeração decimal e aplicá-las ao cálculo com ´números grandes'. É importante perceber também que os alunos devem escrever os números usando a escrita simbólica, ou seja, 600 e 500, para terem a percepção da sua grandeza e dos algarismos que os compõem e não *se limitarem a escrever abreviadamente '6+5=11 centenas'.*

Questões sobre as quais o professor deve pensar antecipadamente:

– *Como poderá ser explorada a tarefa na sala de aula?*
– *O que deve ser realçado na resolução desta tarefa?*
– *Que dificuldades poderão manifestar os alunos?*
– *Que estratégias de diferenciação faz sentido, ou não, usar?*
– *Que materiais podem ser usados na resolução da tarefa?*

A AULA

Antes de propor o problema, o professor dialoga com os alunos para perceber as suas dificuldades sobre números grandes. Pode propor alguns cálculos, que escreve no quadro, e pede a alguns alunos para responderem oralmente:

50+50= porquê?

40+50= porquê?

50+70= porquê?

100+100= porquê?

[2] 'Investiga' tem aqui o sentido de pesquisar, de obter informação com alguma confiança para confirmar a afirmação.

500+500= porquê?

600+600= porquê?

À medida que vai solicitando cada resposta vai percebendo o nível de compreensão dos alunos e, também as suas dificuldades. Aqui o objectivo é que os alunos expliquem oralmente como efectuaram os cálculos, sem necessidade de registos escritos e muito menos de algoritmos ('operação armada').

Em seguida o professor escreve o problema no quadro:

Uma padaria precisa de uma grande quantidade de ovos para fazer bolos. Já comprou 6 centenas de ovos e encomendou 5 centenas. Com quantos ovos ficará a padaria?

e coloca algumas questões sobre o seu contexto, para verificar a sua compreensão:
- *Sabem o que é uma padaria? Conhecem alguma?*
- *Sabem que para confeccionar alguns bolos e bolachas se utilizam ovos? Já viram a mãe ou a avó, a fazer bolos?*
- *Sabem que para fazer uma grande quantidade de bolos são necessários muitos ovos?*

Deve formular cada uma das perguntas individualmente, dar um tempo para que todos pensem e só depois nomear um aluno, ou um par de alunos para responder oralmente.

Em seguida os alunos copiam o problema para o seu caderno e resolvem-no a pares.

Nesta altura o professor deve circular pela sala, observando o trabalho dos alunos e auxiliando os que evidenciam dificuldades. Além disso pode colocar questões para perceber como pensaram os alunos:
- Podes explicar-me como pensaste?
- Porque fizeste desse modo?
- Podes explicar ao teu colega porque fizeste desse modo?

Se houver mais do que uma maneira de resolver o problema, durante a monitorização, deve identificar duas resoluções diferentes (neste caso) que possam ser escritas no quadro.

Quando perceber que a maior parte dos alunos já terminou, solicita a dois deles, com resoluções diferentes, que as copiem para o quadro.

Considerando o problema da fábrica de bolachas, podem surgir dois tipos de resoluções:

500+500=1000 (porque sei que 5+5=10), por isso, 600+500=1100 ovos ou 600+600=1200 (porque sei que 6+6=12), por isso, 600+500=600+600-100=1200-100=1100 ovos

Com a ajuda dos alunos o professor identifica as diferenças entre as resoluções e sistematiza as aprendizagens sobre ´números grandes'.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Objectivo – Construir a tabuada do 7

Caso

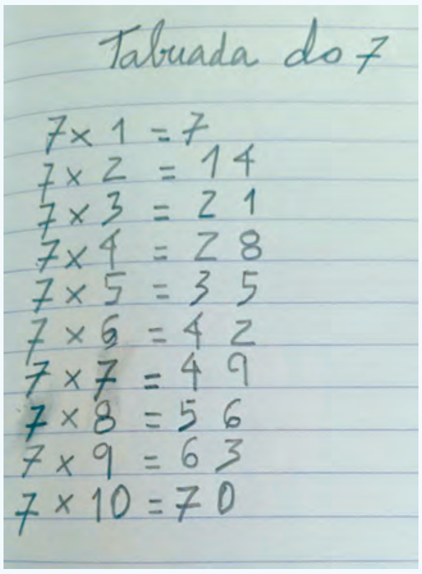
Numa sala de aula da 3.ª classe, o professor começa por informar os alunos que vão aprender a tabuada do 7. Escreve no quadro os dez primeiros produtos e, em seguida, o professor e os alunos, em coro, leem-nos em voz alta:

Professor e alunos: *Sete vezes um, sete. Sete vezes dois, catorze. Sete vezes três, vinte e um (...). Sete vezes dez, setenta.*

Depois desta leitura em voz alta, o professor diz:

Professor: Nesta tabuada, é sempre mais sete. Por isso, temos 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63 e termina-se no 70. Podem passar para os vossos cadernos.

Os alunos passam para os cadernos o que está escrito no quadro, como mostra a figura ao lado.



A PREPARAÇÃO DA AULA

Para preparar uma aula que envolva a construção de uma tabuada da multiplicação é importante que o professor leia as páginas 49, 50 e 51 do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP[1]), nas quais se exemplifica como pode ser construída a tabuada do 6. Poderá, também, recorrer ao guião da ficha número 27 do Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática[2], que apresenta algumas sugestões para a construção da tabuada do 8.

Nestes documentos, salientam-se três ideias fundamentais associadas à construção das tabuadas da multiplicação:

– Quando nos referimos à tabuada de um determinado número, estamos a pensar na repetição desse número, ou seja, esse número tem a função de multiplicando em cada um dos produtos da

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

[2] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guião para o professor - Matemática*. Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

tabuada. Por exemplo, na tabuada do 7, devemos pensar na repetição do número 7, pelo que esta tabuada corresponde a:

$1 \times 7 = 7$

$2 \times 7 = 14$

$3 \times 7 = 21$

(…)

– Os alunos devem perceber que a tabuada não termina no produto em que se multiplica por 10 (por exemplo, a tabuada do 7, não termina no 10×7).
– Os alunos devem determinar os diferentes produtos de uma tabuada, recorrendo a tabuadas construídas anteriormente e a propriedades da multiplicação.

Na 2.ª classe são formalizadas e memorizadas as tabuadas da multiplicação do 2, 5, 10, 1, 3 e 4. No 3.º ano, antes da tabuada do 7, é também formalizada e memorizada a tabuada do 6.

Pretende-se agora construir a tabuada do 7, recorrendo às tabuadas que já foram aprendidas. Este trabalho pode ser feito individualmente ou a pares, propondo uma tarefa semelhante à da ficha 27, ou pode ser feito em grupo turma com a orientação do professor, tal como se ilustra em seguida.

A AULA

O professor começa por escrever no quadro 1×7 e pergunta a um aluno a que é igual este produto. Pede-lhe, em seguida, para explicar como pensou.

É espectável que o aluno responda de imediato que 1x7=7. Mas, para explicar como pensou poderá revelar alguma dificuldade, por ser um produto 'fácil' e/ou por já constituir um facto numérico. O professor deverá fazer a mesma pergunta a outros alunos e, eventualmente, algum poderá dizer que: "Porque é o mesmo que 7×1, que é 7". No caso de nenhum aluno avançar com esta explicação, é importante que o professor o faça relembrando que na tabuada do 1, anteriormente aprendida, $7\times1=7$ e, recorrendo à propriedade comutativa da multiplicação, sabemos que $1\times7=7$.

Em seguida, regista no quadro:

$1\times7=7$, porque é o mesmo do que 7×1

O professor propõe o cálculo de 2×7 e procede de forma idêntica à descrita anteriormente. Há alunos que poderão responder que $2\times7=14$ porque 2×7 é igual a $7+7$ ou é igual 7×2 (recorrendo à propriedade comutativa da multiplicação). O professor regista no quadro:

$2\times7=14$, porque é igual a $7+7$, ou 7×2

Repare-se que até ao produto 6×7 os alunos estão a lidar com produtos que já conhecem das tabuadas aprendidas anteriormente, usando a propriedade comutativa da multiplicação. Contudo, podem também recorrer a produtos da tabuada do 7 que acabaram de determinar, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Por exemplo, para calcular 3×7, podem pensar que $3\times7=(1+2)\times7$ que é igual a $1\times7+2\times7$.

Relativamente ao produto 3×7, o professor poderá registar no quadro o seguinte:

$3\times7=21$, porque é igual a $7+7+7$, ou $14+7$, ou 7×3, ou $1\times7+2\times7$

No caso dos produtos em que o multiplicador é um número par, os alunos também podem efectuar o dobro de produtos da tabuada do 7 já calculados. Por exemplo, para calcular 4×7 podem pensar que se trata do dobro de 2×7:

A propósito do produto 4×7, o professor poderá registar no quadro:

4×7=28, porque é igual a 7+7+7+7, ou 21+7, ou 7×4, ou 1×7+3×7, ou 2×7+2×7, ou é o dobro de 2×7 (ou seja, 2×2×7)

Alguns alunos têm tendência para continuar a calcular os diferentes produtos utilizando apenas estratégias aditivas. Por exemplo, podem calcular 5×7 adicionando 7+7+7+7+7 sucessivamente ou fazendo a 28+7 pensando que 5×7 corresponde a adicionar 7 ao produto anterior da tabuada, 4×7. Enquanto constrói a tabuada no quadro com a ajuda dos alunos, o professor deve realçar as estratégias que se baseiam na multiplicação. Deste modo, nas sugestões seguintes de registos a efectuar no quadro pelo professor não incluímos essas estratégias.

Para o produto 5×7, o registo no quadro poderá ser o seguinte:

5×7=35, porque é igual a 7×5 ou 1×7+4×7 ou 2×7+3×7

A partir do produto 5×7, os alunos que recorrem à propriedade distributiva para efectuar os cálculos tendem a usar uma decomposição do multiplicador envolvendo o número 5, por este ser um número de referência. No caso de o multiplicador ser um número par, é também natural recorrerem à sua decomposição em parcelas iguais. Deste modo, é espectável que, quando recorrerem a esta propriedade, surjam com mais frequência as seguintes estratégias: 6×7=1×7+5×7 ou 6×7=3×7+3×7; 7×7=2×7+5×7; 8×7=3×7+5×7 ou 8×7=4×7+4×7; 9×7=4×7+5×7... Por este motivo, nas sugestões seguintes de registos a efectuar no quadro pelo professor incluímos apenas estratégias deste tipo.

Para o produto 6×7, o registo no quadro poderá ser o seguinte:

6×7=42, porque é igual a 7×6 ou 1×7+5×7 ou é o dobro de 3×7 (ou seja, 2×3×7)

Note-se que a partir do produto 6×7 os alunos deixam de poder recorrer à propriedade comutativa e a produtos conhecidos de outras tabuadas já aprendidas anteriormente (exceptuando o caso da tabuada do 10) para determinar novos produtos. Na verdade, todos os produtos da tabuada do 7 a partir do 6×7 (excepto o 10×7) são 'novos' para os alunos.

Para o produto 7×7, o registo no quadro poderá ser o seguinte:

7×7=49, porque é igual a 1×7+6×7 ou 2×7+5×7 ou 3×7+4×7

Para o produto 8×7, o registo no quadro poderá ser o seguinte:

8×7=56, porque é igual a 3×7+5×7 ou 4×7+4×7 ou é o dobro de 4×7 (ou seja, 2×4×7).

Para efectuar o produto 9×7 e 10×7, para além das estratégias anteriores, os alunos podem recorrer ao produto 7×10 da tabuada do 10, já conhecido. Sabem que 7×10 é igual a 10×7 pela propriedade comutativa da multiplicação. Para calcular 9×7, ao 10×7 podem retirar 7. O registo no quadro poderá ser o seguinte:

9×7=63, porque é igual 4×7+5×7 ou 10×7-7

No que se refere ao 10×7, o registo no quadro poderá ser o seguinte:

10×7=70, porque é igual a 7×10 ou 5×7+5×7 ou é o dobro de 5×7 (ou seja, 2×5×7)

Para que os alunos compreendam que as tabuadas "não terminam no 10×" é fundamental desafiá-los a calcular produtos cada vez maiores, não parando no 10×7. O professor deve propor, por exemplo, que os alunos calculem 11×7, 12×7, 15×7, 19×7.

Os registos no quando associados a estes produtos poderão ser:

$11\times7=77$, porque é igual a $10\times7+7$ ou $5\times7+6\times7$

$12\times7=84$, porque é igual a $11\times7+7$ ou $5\times7+6\times7$ ou $6\times7+6\times7$ ou é o dobro de 6×7 (ou seja, $2\times6\times7$)

$15\times7= 105$, porque é igual a $10\times7+5\times7$

$19\times7= 133$, porque é igual a $10\times7+9\times7$ ou $10\times7+10\times7-7$

É de salientar que o professor, à medida que solicita justificações sobre o modo de obter cada um dos produtos da tabuada, deve ir escrevendo no quadro as expressões matemáticas associadas ao discurso dos alunos. É fundamental que use linguagem simbólica correcta, traduzindo o que os alunos dizem oralmente. Assim, estes vão-se habituando a ler e a interpretar informação escrita usando a linguagem própria da Matemática.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Objectivo – Resolver problemas de divisão

Caso

Numa sala de aula da 3.ª classe, a professora copia do seu manual para o quadro, o seguinte problema.

Numa semana, as galinhas da mãe do Adelino puseram 30 ovos, que o Adelino quer guardar em caixas de 6. De quantas caixas precisa o Adelino?

Depois questiona os alunos sobre a operação a ser usada na sua resolução. Alguns dos alunos falam da adição, outros da multiplicação e outros ainda da divisão. Nessa altura a professora explica que o problema é de divisão e pede ao aluno que referiu esta operação para o ir resolver ao quadro. O aluno regista 30÷6 e faz a 'operação armada' (algoritmo), chegando ao resultado: 5 caixas. A professora repete em voz alta a execução do algoritmo e todos os alunos acompanham em coro.

A PREPARAÇÃO DA AULA

Uma vez que o objectivo da aula é que os alunos resolvam problemas de divisão, é importante que o professor se prepare previamente, lendo a secção Multiplicação e divisão (páginas 39-59) do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP[1]). A resolução de problemas associados à divisão deve partir de situações diversificadas e permite que os alunos se familiarizem com esta operação, construindo estratégias de acordo com o nível de conhecimentos que possuem. Por isso é essencial que o professor resolva cada problema que pretende propor aos alunos e antecipe as diferentes estratégias que estes podem usar na sua resolução, para mais facilmente perceber o que dizem e fazem e os poder apoiar nas suas dúvidas.

É de notar que resolver problemas de divisão não é necessariamente usar o algoritmo (comummente denominado por 'operação armada´). O seu uso é uma estratégia de resolução que nem sempre é a mais adequada para resolver uma situação de divisão. Por isso o professor deve promover a construção de estratégias próprias dos alunos, deixando o uso do algoritmo para situações com números grandes e que não tenham características particulares como ser múltiplo de 2, 5 e 10. Na resolução de problemas de divisão deve ainda ser incentivada a utilização de estratégias associadas às outras operações aritméticas, em particular à multiplicação, operação inversa da divisão. Deste modo os alunos desenvolvem uma compreensão progressiva da divisão e são capazes de mais facilmente lidar com esta operação, tanto no caso dos problemas como em situações de cálculo.

---

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (*MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

No caso do problema apresentado a professora deve levar para a sala de aula uma caixa de 6 ovos, ou uma imagem da mesma, para mostrar aos alunos.

A AULA

Para resolver o problema apresentado - *Numa semana, as galinhas da mãe do Adelino puseram 30 ovos, que o Adelino quer guardar em caixas de 6. De quantas caixas precisa o Adelino?* - a professora pode começar por escrevê-lo no quadro, no caso de este não ser do manual, ou de os alunos não disporem de manual. Em seguida propõe aos alunos que passem o enunciado para o seu caderno e questiona-os sobre a compreensão do mesmo. É nesta altura que é importante perceber se os alunos conhecem caixas de ovos e poderá levar uma para mostrar.

Depois de perceber que os alunos compreendem o problema, deve propor a sua resolução, individualmente ou em grupo. Não é importante, nesta altura, perguntar qual a operação que está associada ao problema, pois essa pergunta condiciona e não facilita a resolução dos alunos. No caso do problema exemplificado, de facto, a situação é de divisão por medida, mas os alunos podem construir uma estratégia aditiva, subtractiva ou multiplicativa, ou até fazer uma simulação com objectos concretos. O que é essencial é que os alunos estejam interessados e se sintam desafiados a pensar numa estratégia para resolver o problema, de acordo com o seu nível de conhecimento.

Os alunos devem ter um tempo para resolver o problema à sua maneira e a professora circula entre as mesas de modo a perceber as estratégias que estão a ser usadas e a identificar possíveis dificuldades. Se estas existirem, os alunos devem ser questionados, no sentido de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades e não condicionando demasiado a sua estratégia de resolução.

Depois de algum tempo, quando a maior parte dos alunos já resolveu o problema, é altura de convidar alguns a irem ao quadro registar a sua estratégia de resolução e explicá-la aos colegas. Para que este momento de partilha seja produtivo em termos de aprendizagem é importante apresentar e explicar as estratégias mais usadas na turma, sequenciando a sua apresentação, por exemplo, da mais elementar para a mais formal. Por vezes, a opção do professor neste momento de partilha pode ser começar pela apresentação de uma estratégia incorrecta que evidencie uma dificuldade de muitos alunos.

Considerando o problema anterior, faz sentido começar pela apresentação de uma estratégia aditiva. Uma estratégia possível seria a seguinte:

6+6=12 12+6= 18 18+6=24 24+6=30

R: O Adelino precisa de 5 caixas.

Neste caso o número de ovos de cada caixa é adicionado sucessivamente, até perfazer o total de 30 ovos. O número de vezes que foi adicionado o 6 corresponde ao total de caixas necessário.

Pode também haver alunos que constroem uma estratégia subtractiva:

30-6=24 24-6=18 18-6=12 12-6=66-6=0

A ideia subjacente a este raciocínio é começar por pensar no número total de ovos e ir retirando sucessivamente 6, até não termos mais ovos. O número de vezes que subtraímos 6 corresponde ao número de caixas necessário.

Uma outra estratégia de resolução é pensar através de um raciocínio multiplicativo. Se os alunos já souberem a tabuada podem pensar no número que multiplicado por 6 é igual a 30, obtendo o 5, o que significa pensar em quantas caixas de 6 são necessárias para guardar 30 ovos.

Finalmente, pode haver alunos que identifiquem este problema como uma situação de divisão e que a representem registando 30:6. Ainda assim, para efectuar este cálculo é essencial que o professor os incentiva a pensar em termos de multiplicação, ou seja, pensar no número que multiplicado por 6 é igual a 30. Efectivamente, considerando os números envolvidos, não faz sentido, mesmo que o problema seja associado à divisão, que seja resolvido usando o algoritmo.

Na sala de aula, se surgirem todas ou apenas algumas das estratégias possíveis de resolução, o professor deve promover a sua apresentação e discussão, realçando que um mesmo problema pode ser resolvido, muitas vezes, de diferentes maneiras. Se surgir, por exemplo, apenas a estratégia aditiva, o professor pode relacioná-la com a multiplicação, se os seus alunos já conhecerem esta operação e as tabuadas., colocando uma questão do tipo:

Vamos observar a resolução da Luena (a estratégia aditiva). Quantas vezes é que ela adicionou o número 6? O que vos faz lembrar? .... Como podemos agora registar cinco vezes o seis? Procurem então na tabuada do seis, qual o número que multiplicado por seis é igual a 30. O que observam?

Este tipo de questões auxilia os alunos a relacionar as estratégias entre si e a estabelecer conexões entre o problema e conhecimentos já adquiridos.

Para a apresentação das várias estratégias e sua comparação, o quadro pode ser dividido em várias partes, de modo a ser possível observá-las ao mesmo tempo, facilitando a discussão sobre as suas semelhanças e diferenças.

Para sistematizar, o professor deve realçar as estratégias que considera mais pertinentes, considerando os objectivos da aula e as aprendizagens dos alunos, neste caso, as estratégias aditiva e multiplicativa, embora possa valorizar todas as estratégias construídas pelos alunos. No caso de problemas de divisão deve ser incentivada a procura de estratégias de resolução que relacionem esta operação com a multiplicação. Ainda durante a sistematização é essencial assegurar-se que os alunos compreendem o que está a ser dito, colocando-lhes questões.

Uma vez que se aprende a resolver problemas resolvendo problemas, este tipo de actividade deve ser continuada e persistente, devendo o professor propor enunciados com contextos que sejam desafiantes e facilmente compreendidos pelos alunos, para além de adequar os números envolvidos às suas aprendizagens numéricas.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

ORDENAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS E DECIMAIS

Objectivo – Perceber a representação decimal de um número

Caso

Numa turma da 3.ª classe a professora registou no quadro os números:

1,3   0,4   1,04   0,38   0,125   2

e pediu aos alunos que identificassem, justificando, o maior e o menor número da lista.

Professora*: Já tiveram tempo para pensar. Qual é o maior número?*

Alunos*: É o 2.*

Rosana*: Não. O maior é 0,125.*

Professora*: Bom, temos aqui duas respostas diferentes. Como as justificam?*

Rosana*: 0,125 tem mais números, é maior.*

Professora*: A Rosana quer dizer que 0,125 é o maior número pois é formado por quatro algarismos: 0, 1, 2 e 5. Reparem nesta lista só ele é que tem três algarismos. O que dizem? Concordam com a Rosana?*

Alunos*: Não. O maior é o 2.*

Professora*: Pois é. O maior número desta lista é 2 e não 0,125. Mas porquê?*

A PREPARAÇÃO DA AULA

Este caso ilustra uma situação comum, em que as crianças prolongam para os números decimais um ‘regra’ decorrente da sua experiência com números inteiros. De facto, quando se trabalha apenas com estes números, é maior o que tem mais algarismos. No entanto, isto já não é verdade quando se alarga o conjunto numérico e se passa a trabalhar com números decimais.

Tal como se indica no Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP1) na secção *Número e valor de posição* (páginas 5-25) os números decimais podem ser representados usando uma vírgula que separa a parte inteira da parte decimal.

Cada algarismo tem um valor de posição associado à base 10. Por exemplo:

– no número 53 → 5 representa 50 unidades, pois é 5 ×10
– no número 2,25 →5 representa 5 centésimas ou 0,05 unidades, pois é 5 × 0,01

De modo a que os alunos consigam dar significado à organização do sistema de numeração decimal,

[1]Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

importa usar materiais e exemplos concretos e não dar apenas justificações teóricas. Um aluno como Rosana precisa de 'ver' que 0,125 é mais pequeno que 0,4 ou 2. Por isso, importa usar imagens e materiais concretos adequados, como os representados nas imagens seguintes.


A aula que se descreve a seguir exemplifica como a graduação de um recipiente pode promover a compreensão dos números decimais. Ela envolve o uso de um recipiente para líquidos em que se colou uma tira de papel para registar a graduação e um ou mais recipientes de que se conhece a capacidade (por exemplo, garrafas de 0,5 litros e de 0,25 litros).

A AULA DE MATEMÁTICA

A aula é organizada seguindo as seguintes fases:

1. Graduar um recipiente para líquidos
2. Ordenar números que fazem parte da graduação do recipiente
3. Ordenar números não visíveis na graduação efectuada
4. Determinar um número situado entre dois números dados

Na fase 1 a professora mostra aos alunos um recipiente[2] e como ele pode ser graduado com duas medidas, uma com 0,125 l e outra com 0,25 l. O professor pode procurar embalagens ou recipientes com estas capacidades (como alguns copos e chávenas) ou assinalar numa embalagem maior estas medidas.



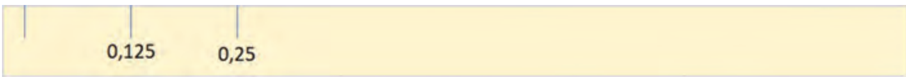
Começa por comparar a capacidade destas medidas mostrando que se despejar duas vezes a água que coloca na medida mais pequena a maior vai ficar cheia, ou seja, 0,125 + 0,125 = 0,250 =0,25 .

Depois, usa a medida mais pequena para ir marcando os valores na tira de papel:

– despeja uma primeira vez a medida mais pequena e assinala na tira de papel 0,125;

[2] Um recipiente alto, estreito e transparente facilita a visualização e o registo do que o professor vai fazer.

- despeja uma segunda vez a medida mais pequena e assinala na tira de papel 0,25
- despeja uma terceira vez a medida mais pequena e assinala na tira de papel 0,375 pois 0,25 + 0,125 = 0,375.



Continua até obter um litro, marcando na tira de papel os valores 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875 e 1 marcados. Depois, estabelece relações entre os números marcados, levando os alunos a perceber a ordenação dos números a partir das relações entre eles. Por exemplo, para chegar ao 0,75 foi necessário despejar 6 vezes 0,125 (0,75 =0,125 + 0,125 +0,125 +0,125 +0,125 +0,125). Olhando para a tira de papel marcada podem estabelecer-se muitas outras outras relações: 0,75 = 0,5 + 0,125 + 0,125; 0,75 = 0,5 + 0,25; ..., etc. .

Na fase 2 a professora foca-se na relação de ordem entre os números e desafia os alunos a ordenar os números

1 0,125 0,25 0,75 0,5

que estão assinalados na recta de graduação do recipiente. Os alunos associam, a graduação na tira de papel e estes números e podem ver, por exemplo, que 0,125 é menor que 1 ou que 0,5.

Na fase 3 a professora escreve no quadro os números 0,375, 0,5 e 0,6 perguntando qual é maior. Uma vez que já foi dado um significado aos números, os alunos como Rosana já percebem bem que 0,6 é maior que 0,375 (embora seja formado por menos algarismos) e que 0,5. Pede, ainda para ordenar:

0,7	0,250	0,61
0,2	0,11	0, 25

A primeira ordenação envolve perceber que 0,25 e 0,250 são iguais e em qualquer delas se usa a graduação do recipiente para esclarecer as possíveis dúvidas dos alunos.

Na fase 4 a professora propõe uma nova situação que, para além de envolver saber ordenar números, inclui o uso de um conhecimento mais aprofundado do sistema de numeração decimal. Assim escreve no quadro:

Determina um número que esteja compreendido entre:

a. 1,2 e 1,6
b. 4 e 4,5
c. 0 e 0,1

Alguns alunos não percebem que "estar compreendido entre" quer neste caso dizer que é maior que um deles e menor que o outro. Por isso, a professora desenha no quadro uma recta numérica e explica como 2 está entre 1 e 3 ou 3,4 está entre 3 e 3,5.

Esta mesma recta é usada para corrigir as respostas dos alunos que percebem que existem muitas respostas diferentes correctas. Por exemplo, em a) alguns alunos respondem 1,3, outros 1,4, outros 1,5. Há também alunos que podem números com três algarismos como 1,25 ou 1,34 e que são respostas igualmente correctas.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Objectivo – Determinar a soma e o produto de dois números usando valores de referência

Caso

O professor Júlio e a professora Noélia falam sobre o modo como costumam trabalhar a adição e a multiplicação de números decimais.

***Júlio**: Eu costumo dividir os meus alunos em grupos, de acordo com as suas dificuldades. No outro dia dividi a classe em 6 grupos.*

- *os grupos 5 e 6, que têm mais dificuldade, calcularem 25,3 + 4,2, que é uma adição sem transporte, com números relativamente pequenos*
- *os grupos 3 e 4, que são intermédios, calcularam 22,7 + 14,2 , que é uma adição sem transporte, com números um pouco maiores pequenos*
- *os grupos 1 e 2, que têm mais facilidade, calcularam 59,2 + 51,3 + 2,9, que é uma adição com transporte.*

No final foi ao quadro um aluno de cada grupo corrigir o exercício.

***Noélia**: Eu também costumo usar tarefas paralelas para diferenciar. E às vezes, depois de cada grupo ter calculado a resposta, gosto de os desafiar a pensar nos números que usaram e de comparar a ordem de grandeza dos resultados e os processos de resolução que usaram. No outro experimentei com dois tipos de tarefas paralelas:*

- *Tipo A (os alunos com mais facilidade): Calcula a) 1,5 × 250; b) 1,25 × 250*
- *Tipo B (os alunos com mais dificuldade): Calcula a) 0,5 × 20; b) 1,5 × 20*

***Júlio**: Na formação vimos que era importante isso de olhar para os números, de criticar os resultados, de estimar e comparar. Mas estamos tão habituados a fazer a 'conta armada' que acabam sempre por fazer assim, o que nem sempre é o melhor*

***Noélia**: Não é fácil, mas eu posso dar um contributo. Olha, começo por ...*

A PREPARAÇÃO DA AULA

Este caso ilustra uma situação de professores preocupados em diferenciar os seus alunos de modo a melhor promover a aprendizagem de cada um, tal como se perspectiva nos Manuais de Diferenciação I e II[1].

Júlio já percebeu a importância de várias aspectos mas ainda está pouco habituado a sair de uma rotina em que os alunos só fazem cálculos a partir de 'armar uma conta'. Por isso, precisa de aprender

[1] *Manual de Diferenciação Pedagógica em Sala de Aula para Professores do Ensino Primário,* Volumes I e II. Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação, República de Angola

a reflectir no tipo de números que pode propor aos seus alunos e no modo de os focar nas relações entre eles.

Um aspecto central a ter em conta é o uso de números de referência ou seja, números com os quais é mais fácil calcular rapidamente e que facilitam o cálculo com números próximos deles. Por exemplo, na adição com números inteiros com dois algarismos, os números 'próximos das dezenas', como 19, 21, 29, 31, 39, 41, ..., são habitualmente considerados números de referência. Também os números decimais como 0,9; 1,1 ou 12,9, ou seja, números cuja parte decimal é 9 ou 1, são habitualmente importantes referências para calcular rapidamente e sem necessidade de 'armar a conta'.

Para a multiplicação, os casos em que um dos factores é 0,1; 0,5; 0,25; 0,001; etc., facilitam igualmente os cálculos e ajudam a desenvolver um sentido crítico relativamente à comparação de resultados de duas expressões numéricas como no exemplo em que se calcula 1,5 × 12 e 1,6 × 12.

Neste caso, quando os alunos já perceberam que 1,5 a multiplicar por um número é igual a esse número mais a sua metade, indicam de imediato que:

$1,5 \times 12 = 12 + 6 = 18$

Depois, ao relacionar 1,6 com 1,5, sabem desde logo que o resultado de 1,6 12 tem de ser superior a 18. Como 1,6 = 1,5 + 0,1, podem começar a perceber que se somarem uma décima de 12 (0,1 12) que é 1,2 a 18 obtêm o resultado exato de 1,6 12, ou seja, 19,2.

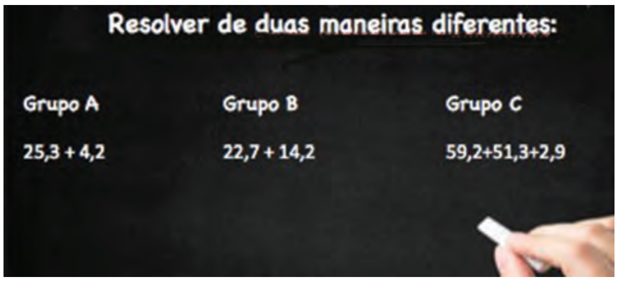
A aula[2] que se descreve a seguir exemplifica como o professor pode usar os exemplos usados pelo professor Júlio e a professora Noélia para determinar a soma e o produto de dois números usando valores de referência.

A AULA

A aula é organizada seguindo as seguintes fases:

1. Propor aos alunos, organizados em três grupos, com níveis diferentes de dificuldades no cálculo numérico, as expressões numéricas usadas pelo professor Júlio, mas pedindo que procurem determinar o resultado usando dois processos diferentes.
2. Analisar com todos os alunos diferentes processos de resolução e de relação entre os números.
3. Propor aos alunos, organizados em dois grupos, com níveis diferentes de dificuldades no cálculo numérico, as expressões numéricas usadas pela professora Noélia, mas pedindo que procurem determinar o resultado sem 'armar a conta'.
4. Analisar com todos os alunos diferentes processos de resolução e de relação entre os números.

Na fase 1, depois de dividir a turma em três grupos de alunos com níveis de conhecimentos matemáticos diferentes (grupo A – mais dificuldades, grupo B – intermédio, grupo C mais facilidade), o professor escreve no quadro o que cada um deve fazer:

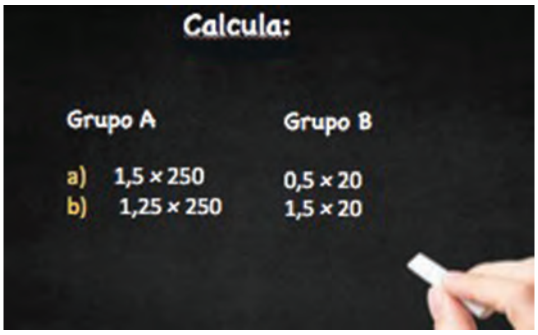


[2] Por se tratar de um exemplo de prática que incide em aspetos idênticos, referimo-nos a uma só aula. No entanto, pode ser mais adequado desdobrar esta aula em duas partes que podem ser exploradas em aulas e momentos do ano letivo distintos: um quando se trabalha a adição (fases 1 e 2) e outro quando se trabalha a multiplicação (fases 3 e 4).

Na fase 2, tendo em conta que os alunos estão mais habituados a usar 'a conta armada', o professor centra-se numa análise das relações numéricas que permitem determinar o resultado de outra forma. Por exemplo:

- adicionar mentalmente a parte inteira e depois juntar a soma da parte decimal: 25 + 4 = 29; 29 + 0,5 = 29,5
- adicionar, por partes, a partir de um termo: 22,7 + 14= 36,7; 36,7 + 0,2 = 36,9
- usar números mais 'cómodos' e compensar: 59,2 + 51,3 +2 ,9 = 60,2 + 50,3 + 2,9 = 110,5 + 2,9 = 110, 5 + 3 – 0,1 = 113,5 – 0,1 = 113,4.

Na fase 3 desta aula (ou numa outra aula) o professor propõe aos alunos, divididos em dois grupos (grupo A – mais dificuldades, grupo B mais facilidade) a resolução de expressões numéricas:



Na fase 4 (ou numa segunda fase de outra aula), desafia todos os alunos a pensar em perguntas focadas na comparação da ordem de grandeza dos resultados e dos processos de resolução, procurando que percebam que multiplicar um número por:

- 0,5 significa determinar metade desse número;
- 1,5 significa adicionar 3 metades ou o número com a sua metade
- 1,25 significa adicionar o número com o seu quarto (metade da metade)

NÚMEROS E OPERAÇÕES

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Objectivo – Compreender o significado de multiplicar um número inteiro por um número decimal

Caso

Numa sala de aula da 3.ª classe, o professor copia para o quadro três expressões numéricas que tinham sido usadas na formação e pede aos seus alunos para as resolverem:

a. 0,4 × 125 =
b. 1,4 × 125 =
c. 1,8 × 125 =

Alguns alunos comentam "É sempre com 125", mas, tal como todos os seu colegas, usam o algoritmo ('conta armada').

Depois de algum tempo, quando a maior parte dos alunos já tinha respondido às três perguntas, o professor corrige-as no quadro, usando a 'conta armada'.

À medida que regista os valores numéricos vai explicando o que faz:

– *4 vezes 5 é 20, fica 0 e vai 2. 4 vezes 2 é 8 mais 2 dá 10. Fica 0 e vai 1. 4 vezes 1 é 4 mais um 5. Agora contamos as casas decimais.*

1	2	5
×	0,	4
5	0	0

– *Quantas casas decimais há? Uma. Por isso fica 50,0 ou seja 50. Há uma casa decimal por isso tenho de colocar aqui uma vírgula.*

1	2	5
×	0,	4
5	0,	0

Vários alunos que não tinham assinalado a casa decimal parecem não perceber. Um deles diz:

– *mas como o zero não conta, eu não marquei a vírgula. Deu-me 500.*

A PREPARAÇÃO DA AULA

O caso descrito anteriormente ilustra uma situação que chama a atenção de dois aspectos fundamentais que devem ser pensados quando o professor prepara a sua aula:

1. Qual a intencionalidade das tarefas que os alunos irão resolver?
2. Que dúvidas/confusões os alunos poderão ter/fazer?

Relativamente ao primeiro, importa que o professor se questione:

O que é que isto significa? Porque é que na formação propuseram esta sequência de cálculos, em que um dos fatores é sempre o mesmo (125)?

No *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP[1]) na secção *Multiplicação e divisão* (páginas 39-59) e nas páginas 49-53 do *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guião para o professor Matemática*[2], pode relembrar os aspectos fundamentais do ensino e aprendizagem da operação multiplicação e da sua profunda relação com o desenvolvimento do cálculo mental.

Neste caso, importa recordar que os factores foram escolhidos para dar significado e relacionar os cálculos que se efectuam:

- ter sempre o mesmo factor, neste caso 125, ajuda a poder relacionar as três expressões
- ter 0,4; 1,4 que é igual a 1 + 0,4 e 1,8 que é igual a 1,4 + 0,4 é intencional para poder calcular mentalmente o resultado da segunda e da terceira expressão numérica, sabendo o resultado da primeira.

Um outro aspecto a rever sempre que o professor pensa na aula que vai dar, diz respeito às dúvidas e confusões que os alunos podem fazer. No caso da multiplicação com números decimais é muito habitual surgirem dúvidas 'relacionadas com as vírgulas' (quantas 'casas' conto? Somo as casas decimais? ...) e também, como ilustrado no episódio, com generalizar incorrectamente regras aprendidas e que não se percebem (como tenho 0 e vírgula o 0 não conta).

Para além destes aspectos, o professor também deve decidir como vai organizar a aula. No exemplo seguinte, ilustramos uma aula com um formato de introdução, resolução dos alunos, discussão professor/alunos focada em resoluções propostas pelos alunos (correctas e incorrectas) e sistematização. No entanto, poder-se-ia pensar num formato de discussão professor/alunos, com o professor a colocar questões e a avançar na resolução da tarefa a partir das respostas dos alunos ou num formato misto de discussão professor/alunos alternado com espaço para os alunos resolverem por si cada questão.

A AULA

Introdução. O professor regista no quadro as três expressões numéricas e pede aos alunos para as resolver realçando que o podem fazer de formas diferentes.

Se, como no caso descrito, algum aluno comentar que em todas existe o factor 125, ou que os factores 0,4; 1,4 e 1,8 se podem relacionar entre si, o professor sublinha este tipo de comentário e coloca-o como um desafio para pensar:

- *Pois é. Temos sempre 125. Será que isso pode facilitar o nosso trabalho?*

Resolução pelos alunos. Cada aluno, no seu lugar, calcula o valor de cada uma das expressões. Como estão muito habituados a fazer o algoritmo, 'armam a conta' e determinam com maior ou menor facilidade o resultado. Nesta fase o professor aproveita para ir ajudando de perto os que têm mais dificuldade e observa as dúvidas que vão surgindo para as explorar na discussão final da tarefa. Nota que a multiplicação por 0,4 está a levar alguns alunos, como ilustrado no caso descrito, a errar a

[1]Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.
[2]Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guião para o professor Matemática*. Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

resolução. Nota, também que nenhum aluno relaciona as expressões entre si, o que os obriga a calcular uma a uma o seu valor. Por isso, estes são os dois aspectos que seleciona para analisar com todos os alunos.

Discussão da tarefa e sistematização. O professor divide o quadro em dois e pede a um dos alunos que tinha considerado que 'o zero não conta' e a um que tenha determinado o valor correctamente para registarem no quadro as suas resoluções. Depois pergunta:

– *Não percebo. A um dá 50 e a outro dá 500. Quem poderá ter razão e porquê?*

Nesta fase o professor conduz a discussão para o significado ou seja: multiplicar um número por 0,4 é o mesmo que determinar 4 décimas desse número. Isso corresponde a dividir o número em 10 partes iguais, em que cada uma é uma décima, e depois multiplicar por 4. Deste modo, obtém-se sempre um valor mais pequeno que 125, pelo que 500 não pode estar certo.

– *O que confundiu alguns alunos foi a ideia de que 'o zero não conta'. Esta ideia não é correcta, porquê?*

Vários alunos conseguem identificar casos em que o 'o zero conta' e indicam exemplos de multiplicações por 0. No entanto, a justificação de que também neste caso 'o zero conta' será mais difícil pois envolve perceber que:

– na 'conta armada' ao multiplicar por 4 se está a multiplicar por 4 décimas pois 0,4 é uma representação de quatro décimas. Deste modo, ao obter 500 obtêm-se 500 décimas, ou seja 50 unidades.

Depois deste aspecto estar claro para todos, o professor prossegue com a análise da tarefa e solicita a outros alunos que indiquem como responderam às duas questões seguintes e regista as suas respostas no quadro. O foco da discussão é então dirigido para uma análise dos factores que foram multiplicados por 125 e da previsão do modo de os obter sem 'armar a conta'. Esta fase envolve clarificar que:

– 1,4 125 é igual a 125 + 50 (1)
– 1,8 125 corresponde a somar ao resultado de 1,4 125 o resultado de 0,4 125, ou seja, 175+50 = 225

Finalmente, procurando que os alunos tenham oportunidade de interiorizar e aplicar estes aspectos relativos à multiplicação de um número inteiro por um número decimal o professor desafia-os a, rapidamente, determinar o valor das seguintes expressões numéricas:

– $0{,}2 \times 330$; $1{,}2 \times 330$ e $2{,}4 \times 330$
– $0{,}06 \times 250$; $1{,}06 \times 250$ e $1{,}12 \times 250$

NÚMEROS E OPERAÇÕES

DIVISÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Objectivo – Dividir mentalmente um número inteiro por 0,5 e 0,25

Caso

Numa sala de aula da 4.ª classe, os alunos determinam o resultado de 14 : 0,5.

O professor deixa que os alunos resolvam a questão por escrito.

Depois, corrige-a no quadro indicando que, como dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2, o resultado é 28. Finalmente, para confirmar este resultado, usa o algoritmo da divisão, explicando que:

– *como o divisor tem uma casa decimal tem de se acrescentar uma casa decimal ao dividendo, ficando*

$$\begin{array}{r|l} 14{,}0 & \underline{0{,}5\quad} \\ & \end{array}$$

– *a seguir basta fazer a divisão como se se tratasse de números inteiro. Por isso, devem pensar:*

$$\begin{array}{r|l} 14{,}0 & \underline{0{,}5\quad} \\ 4\,0 & 2 \end{array}$$

"qual o número que multiplicado por 5 vai dar 14 ou o mais próximo possível de 14? É 2. 2 × 5 é 10 para 14 é 4. A seguir baixa-se o 0. Depois como 8 × 5 dá 40 para 40 é 0. E fica:

$$\begin{array}{r|l} 14{,}0 & \underline{0{,}5\quad} \\ 4\,0 & 28 \\ 0 & \end{array}$$

O professor termina a sua explicação: *"assim vimos que o resultado é 28 o que confirma a regra que dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2".*

A PREPARAÇÃO DA AULA

O caso descrito anteriormente ilustra uma situação de não clarificação do que significa trabalhar o cálculo mental e que passa por dar sentido, usando contextos apropriados, aos números e às relações numéricas e insistindo depois na sua prática rotineira.

Tal como se indica no *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP[1]) na secção *Multiplicação e divisão* (páginas 39-59) é importante que ação do professor tenha em conta que:

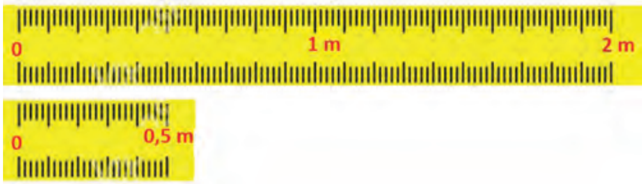
[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

– quando se quer desenvolver o cálculo mental importa saber explicar o porquê das regras que usamos para calcular mentalmente
– é fundamental preparar um ou dois modelos que apoiam a explicação das regras, como aqui vai ser exemplificado com a fita métrica e a imagem de pizzas.
– importa que os alunos pratiquem o cálculo mental, usando as regras entretanto descobertas e pensando noutras que delas podem decorrer.

Uma vez que o objectivo da aula é que os alunos desenvolvam o cálculo mental, é fundamental que o professor não use a 'operação armada' (embora não proíba os alunos de o fazer) e focar dois aspectos:
– desenvolver a intuição de que dividir por 0,5 é algo que é fácil da fazer rapidamente
– explicar a razão desta 'facilidade' recorrendo a modelos sugestivos

No caso concreto da divisão por 0,5 o professor podia levar para a aula, por exemplo, uma fita métrica e/ou uma imagem de uma ou mais pizzas ou de um pão ou biscoito com a forma de um círculo, materiais que apoiam a compreensão do que significa dividir por 0,5 (ou seja, determinar o número de metades).

A fita métrica pode ser usada para, por exemplo, dividir uma tira com 2 metros de comprimento por uma com meio metro de comprimento (0,5 m) vai dar 4 partes de meio metro cada uma.



As imagem de uma ou mais pizzas permite perceber que uma pizza tem duas metades (1 ÷ 0,5 = 2), 2 têm 4 (2 ÷ 0,5 = 4), 3 têm 6 (3 ÷ 0,5 = 6), etc..

A AULA

A aula é organizada seguindo as seguintes fases:
1. Desafiar os alunos a calcular 14 ÷ 0,5
2. Partilhar os resultados indicados pelos alunos
3. Dar sentido à resposta correcta

No final da aula o professor pode marcar como trabalho para casa descobrir uma forma para dividir mentalmente por 0,25. Mais concretamente pode propor:

Pensando no modelo das pizzas, (ou pães ou bolachas circulares) em que 0,5 é associado a meia pizza (pão, bolacha) e 0,25 a um quarto de pizza (pão, bolacha), para calcular mentalmente o valor de:

45 ÷ 0,5

21 ÷ 0,25

35 ÷ 0,25

Fases 1 e 2. O professor regista no quadro '14 ÷ 0,5 =...' e pede aos alunos que quando souberem a resposta coloquem o dedo no ar. Nem todos obtêm o mesmo resultado e há mesmo alguns que não conseguem determinar qualquer resposta. O professore regista no quadro as respostas obtidas pelos alunos:

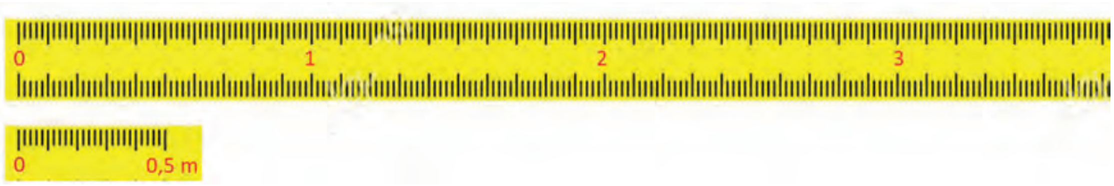
2,8; 28; 7.

A partilha dos resultados e a explicação do modo como foram obtidos confirma a intuição inicial do professor de que os alunos que:

- responderam 7 confundem dividir por 0,5 com multiplicar por 0,5;
- responderam 2,8 consideraram, como se referiu na Prática de sala de aula 5, que o '0 não conta' e, portanto registaram o resultado da divisão por 5 e não por 0,5.

Fase 3. As explicações dos alunos focam-se na repetição do uso de uma regra decorada e na descrição do procedimento correspondente ao uso da 'conta armada': qual é o número que multiplicado por 5 vai dar mais perto de 14 é 2. 2 vezes 5, 10 para 14, 4. Ponho uma vírgula e acrescento 0. Baixo 0 ...

Por isso, o professor desafia-os a pensar no que significa dividir 14 por 0,5 usando um metro e imagens de pizzas. Pega na fita métrica, assinala meio metro, e simula o que daria dividir 14 metros em 'meios metros':



Também mostra uma pizza dividida ao meio e pergunta quantas meias pizas precisa de modo que cada pessoa coma meia pizza (0,5). Pode até simular esta divisão, usando 14 alunos e confirmando que cada pizza vai dar para 2 alunos pelo que vão ser necessárias 28 meias pizzas.

De modo a confirmar que os alunos perceberam o sentido de dividir por 0,5 com a fita métrica o professor pede-lhes que a usem para medir 4 metros. Quantos meios metros obtêm?

Registar que $4 \div 0{,}5 = 8$, explicando como o modelo da pizza permite perceber esta divisão e o resultado que se obtém:

No final da aula o professor realça o sentido que se pode atribuir a dividir por 0,5 e regista no quadro a regra: dividir um número por 0,5 é igual a multiplicá-lo por 2

Na aula, seguinte, no final da correção do trabalho de casa, o professor realça o sentido que se pode atribuir a dividir por 0,25 e regista no quadro a regra: dividir um número por 0,25 é igual a multiplicá-lo por 4.

GEOMETRIA

NOÇÃO DE ÂNGULO

Objectivo – Compreender a noção de ângulo e reconhecer ângulos

Caso

Numa sala de aula, o professor copia do seu manual para o quadro a definição de ângulo, pois a maioria dos alunos não tem manual.

As semi-rectas que têm origem em O são os lados do ângulo. O ponto O é o vértice do ângulo. Simbolicamente o ângulo representa-se por ∡AOB.

Em seguida representa um ângulo no quadro, usando material de desenho e pede aos alunos para passarem toda a informação para o caderno. Enquanto os alunos copiam para o caderno, o professora circula entre as mesas, assegurando-se que todos cumprem a tarefa proposta. No final, pergunta aos alunos se perceberam o que é um ângulo. Em coro, estes respondem afirmativamente.

A PREPARAÇÃO DA AULA

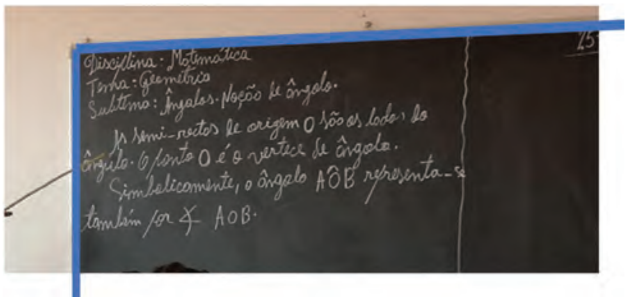
Uma vez que o objectivo da aula é que os alunos compreendam o que é um ângulo e que o saibam identificar em objectos do dia-a-dia, é importante que o professor se prepare previamente, lendo a secção *Grandezas e medida* (páginas 202-204) do Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário (MMPEP[1]).

É essencial que o professor pense antecipadamente em objectos do dia-a-dia dos alunos ou presentes na sala de aula que os ajudem a reconhecer ângulos e a compreender a noção de ângulo. Esta noção é um pouco abstracta para os alunos, mas o importante é que saibam reconhecer um ângulo, em particular, num polígono. A noção de ângulo habitualmente trabalhada no ensino primário é caracterizada por uma figura geométrica constituída por duas semi-rectas (os lados) com a mesma origem (o vértice) e a porção de plano determinada por elas. Quando se refere apenas a noção de ângulo no ensino primário está implícito o facto de este ser o ângulo convexo, ou seja, cuja amplitude é menor do que a de um ângulo raso, ou seja, entre 0 e 180 graus.

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

A AULA

O trabalho em torno dos ângulos pressupõe já terem sido abordadas as características de algumas figuras geométricas, nomeadamente do triângulo, quadrado e rectângulo. Por isso, o professor pode começar por pedir aos seus alunos para, na sala de aula, identificarem figuras que se assemelhem a rectângulos. Por exemplo, na imagem à direita podemos observar rectângulos nos vidros das janelas, nos tampos das mesas, nos livros e nos cadernos que os alunos manuseiam. Também o quadro preto das salas de aulas tem a forma de um rectângulo e pode ser a partir dele que o professor começa por identificar um ângulo, tal como evidencia a figura seguinte.

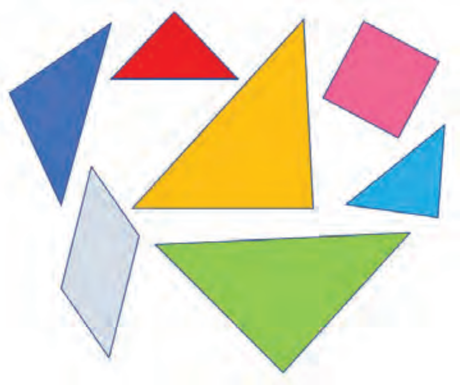


A ideia de ângulo está relacionada com a ideia de duas semi-rectas com a mesma origem e, por isso, é possível reconhecer um ângulo (interno ao rectângulo) associado a cada vértice do rectângulo. O professor pode materializar a noção de ângulo usando duas réguas ou duas varas de modo que tenham uma das extremidades coincidente.

É importante que os alunos percebam que as semi-rectas estão associadas a direcções e que são infinitas, e, por isso as réguas ou varas são apenas uma sua representação. Deste modo a noção de ângulo que os alunos vão construindo inclui duas semi-rectas (os lados do ângulo) com a mesma origem (vértice do ângulo) e a porção de plano determinado por estas (ângulo convexo).

Convém, então, usando as duas varas, que o professor represente diferentes ângulos, em diferentes posições, partindo dos vértices do rectângulo, tal como exemplificam as seguintes figuras. Neste momento é essencial que os alunos percebam que a porção de plano determinada pelos lados do ângulo é condicionada pela maior ou menor 'abertura' das semi-rectas. Quando exemplifica vários ângulos, o professor pode começar a usar os termos lado e vértice do ângulo, embora ainda sem a preocupação de escrever utilizando a terminologia simbólica associada.

Depois de ter exemplificado vários ângulos a partir da representação do rectângulo no quadro preto, o professor pode pedir a alguns alunos que identifiquem outros ângulos, na sala de aula, e que os representem usando as duas varas ou réguas.



Como muitos dos ângulos que se reconhecem na sala de aula são rectos, é essencial que os alunos saibam reconhecer outro tipo de ângulos. Para isso o professor pode disponibilizar diferentes figuras geométricas ou pedir aos alunos que as recortem em papel. O reconhecimento de diferentes ângulos pode ser realizado, também, a partir de figuras geométricas representadas nas peças do tangram (na figura ao lado) ou noutro quebra-cabeças geométrico.

Se houver disponível, um outro material que poderá ajudar as crianças a reconhecer e a construir ângulos é o geoplano. A sua utilização pode ser efectuada de dois modos: primeiro, o professor constrói um conjunto de ângulos e mostra aos alunos; depois, numa segunda fase, pode pedir aos alunos que aí representem ângulos diferentes. Os ângulos podem ser representados por si só (imagem à esquerda), ou podem ser identificados a partir de uma figura geométrica (imagem à direita).

O reconhecimento e construção de ângulos pelos alunos pode também ser efectuado em papel ponteado, que o professor disponibiliza aos alunos ou grupos de alunos. Mesmo que não haja material para todos (geoplano, tangrans ou papel ponteado) há sempre a possibilidade de construção de ângulos no caderno, usando um lápis e uma pequena régua. É essencial que os alunos tenham tempo para identificar e construir eles próprios diferentes ângulos. O professor deve circular pela sala, de modo a tentar perceber se os alunos compreendem o que foi solicitado – construir ângulos – e a auxiliá-los no caso de identificar dificuldades. Pode também solicitar a alguns que registem ângulos no quadro, garantindo que estes são diversificados e em diferentes posições.

O fundamental desta aula é que os alunos desenvolvam a noção de ângulo e que não seja dada ênfase à terminologia associada a este conceito. Por isso, o modo como simbolicamente se representa um ângulo ou uma semi-recta não deve ser trabalhado nas primeiras aulas. Mais tarde, quando os alunos já tenham desenvolvido essa noção intuitiva, será a altura de introduzir as diferentes notações.

GEOMETRIA

TIPOS DE ÂNGULOS

Objectivo – Reconhecer e comparar diferentes tipos de ângulos

Caso

Numa sala de aula da 4.ª classe, a professora copia do seu manual para o quadro as definições de ângulo recto, agudo e obtuso, pois a maioria dos alunos não tem manual.

Os ângulos rectos são os que têm uma amplitude igual a 90⁰. Os ângulos agudos têm uma amplitude menor do que 90⁰ e maior do que 0⁰. Os ângulos obtusos têm uma amplitude maior do que 90⁰ e menor do que 180⁰.

Em seguida, representa os três tipos de ângulos no quadro, usando material de desenho, e pede aos alunos para passarem toda a informação para o caderno. Enquanto os alunos copiam para o caderno, a professora circula entre as mesas, assegurando-se que todos cumprem a tarefa proposta. No final, pergunta aos alunos se perceberam e estes, em coro, respondem afirmativamente. Depois desenha alguns ângulos no quadro e pede aos alunos para identificarem cada um.

A PREPARAÇÃO DA AULA

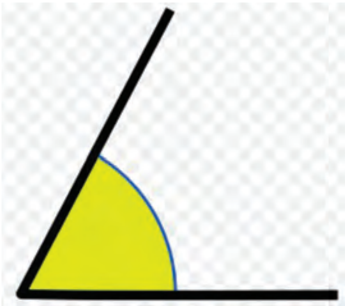
Uma vez que o objectivo da aula é que os alunos reconheçam e comparem ângulos, é importante que o professor se prepare previamente, lendo a secção *Grandezas e medida* (páginas 202-205) do *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). A amplitude de um ângulo é a propriedade comum a todos os ângulos geometricamente iguais. Perante dois ângulos é sempre possível compará-los directamente, por exemplo, sobrepondo-os. Também é possível considerar a amplitude de um determinado ângulo, como o recto, como unidade de medida e, a partir daí identificar se um outro ângulo tem uma amplitude maior, menor ou igual que a unidade.

A partir da 5.ª classe é introduzido o sistema sexagesimal, usando o grau como unidade de medida da amplitude de ângulos. Nessa altura, para efectuar medições de ângulos utiliza-se um transferidor. Antes disso é essencial que os alunos desenvolvam a noção de ângulo e que sejam capazes de comparar ângulos entre si, tendo como referência o ângulo recto. Este pode ser definido como um dos quatro ângulos geometricamente iguais determinado por duas rectas perpendiculares.

É essencial que o professor leve para a aula folhas de papel (podem ser usadas), ou pequenos rectângulos de papel, que possam ser dobrados. O ideal é que cada aluno possa dispor de um rectângulo (ou folha de papel).

A AULA

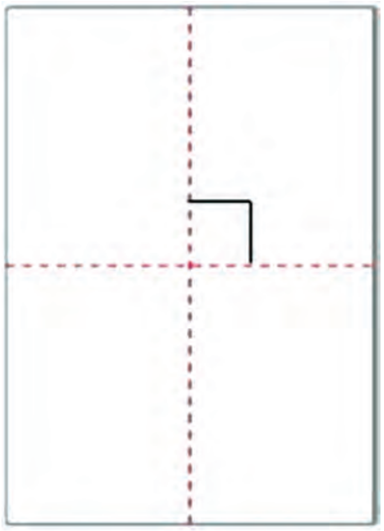
O professor pode começar por pedir aos alunos que identifiquem ângulos, observando à sua volta. Depois solicita a alguns que expliquem aos colegas onde reconhecem um ou mais ângulos. No caso de ser possível, também pode pedir aos alunos que construam vários ângulos num geoplano ou em papel ponteado. Uma outra alternativa é solicitar aos alunos a construção de alguns ângulos no caderno, usando uma régua. Deste modo, percebe se os alunos se recordam e compreendem, ainda que intuitivamente, o que é um ângulo.



Após este primeiro momento o professor deve pedir aos alunos para observar os ângulos construídos e compará-los entre si. Espontaneamente, alguns alunos dirão que uns ângulos são maiores do que outros. Nesta altura é importante que o professor perceba se os alunos se estão a referir ao comprimento dos lados ou à porção de plano entre os lados. No caso de se referirem ao comprimento dos lados, é essencial que o professor recorde que os lados de um ângulo são semi-rectas e que o que eles observam é apenas uma representação. Deve realçar que quando se comparam ângulos estamos a referir-nos à porção de plano determinada pelos seus lados, tal como mostra a imagem.

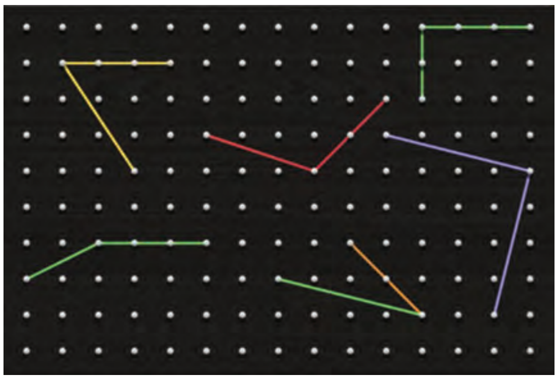
Em seguida, pode distribuir os pedaços de papel rectangulares (ou folhas de papel) e explica-lhes que vão construir ângulos especiais, que se chamam ângulos rectos.

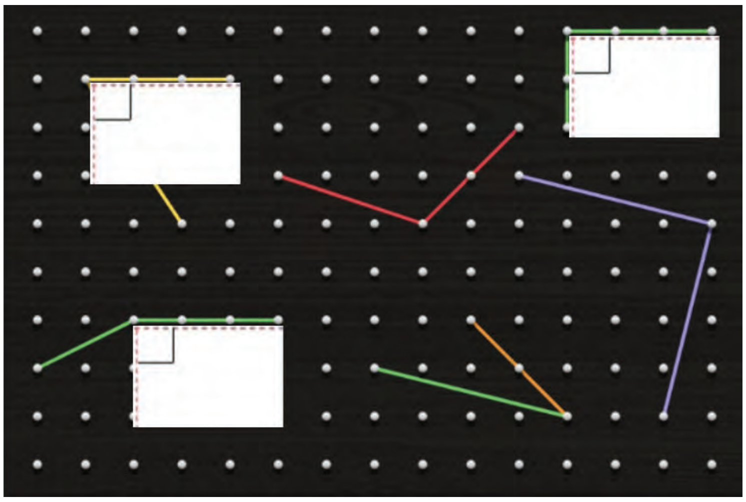
Convida-os a dobrarem a folha rectangular segundo o seu comprimento e, em seguida, segundo a sua largura, ficando o papel, quando se desdobra, com vincos como mostra a figura ao lado. Através das dobragens consecutivas os alunos compreendem que os quatro ângulos que têm o ponto O como vértice comum são iguais. Nesta altura o professor poderá informar que a cada um dos quatro ângulos iguais determinado por duas rectas perpendiculares (representadas pelos vincos da folha) se chama ângulo recto. A partir desta identificação os alunos podem recortar (ou apenas dobrar novamente) o ângulo que lhes irá servir como unidade de medida para comparar a amplitude de outros ângulos. Para o efeito podem comparar os ângulos anteriormente construídos com o ângulo recto.



Ilustra-se esta actividade com ângulos representados num geoplano, mas o mesmo se poderá fazer usando ângulos representados no caderno escolar ou no quadro.

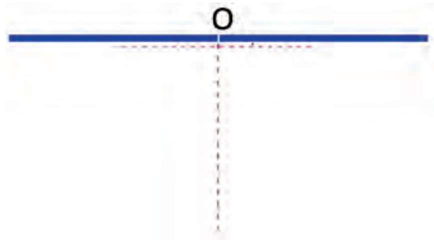
Os alunos podem sobrepor o seu 'ângulo recto', fazendo coincidir o vértice com o do ângulo a comparar e justapondo um dos lados, tal como mostra a figura em baixo.





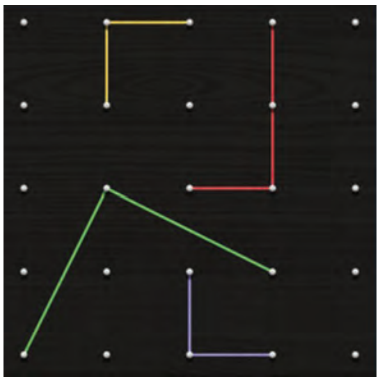
No caso do ângulo representado à esquerda, em cima, como é menor do que o ângulo recto, chama-se ângulo agudo. O ângulo representado à direita, em cima, coincide com o ângulo recto, pelo que é outro ângulo recto.

O ângulo representado à esquerda em baixo é maior do que o ângulo recto, pelo que se chama ângulo obtuso. Deste modo, as denominações de ângulo agudo e ângulo obtuso surgem a partir da comparação com a amplitude do ângulo recto, o que ajuda a dar sentido a estas designações. Do mesmo modo poderá surgir a noção de ângulo raso, como sendo aquele que corresponde a dois ângulos rectos, tal como mostra a figura.



O fundamental desta aula é que os alunos reconheçam diferentes tipos de ângulos, comparando-os com o ângulo recto. Para isto é necessário tempo, para que sejam os próprios alunos a construir e a comparar ângulos e não apenas o professor. Nas turmas com muitos alunos, estes podem ser organizados em grupos de modo a poderem ter acesso aos materiais disponíveis. Todos os alunos devem ter oportunidade de construir e comparar ângulos num geoplano, em papel ponteado, ou no caderno, de modo a compreenderem as diferenças entre os vários tipos de ângulos, reconhecendo um ângulo recto, um agudo, um obtuso e um raso.

É de notar que a compreensão sobre os diferentes tipos de ângulos implica reconhecê-los em diferentes posições. Nesse sentido, o professor deve apresentar, por exemplo, o ângulo recto em diferentes posições, tal como mostra a figura ao lado, e não apenas naquela que tradicionalmente aparece nos manuais. O mesmo acontece com os outros tipos de ângulos.



O importante nesta altura é reconhecer e distinguir os vários ângulos entre si, sem haver necessidade de introduzir o sistema sexagesimal de medida de amplitude de ângulos, a trabalhar posteriormente, na 6.ª classe.

NÚMEROS E OPERAÇÕES

FRACÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS

Objectivo – Relacionar números decimais com números representados por fracções

Caso

Numa sala da 5ª classe, os alunos resolvem tarefas que envolvem números decimais e números representados sob a forma de fracção. O professor circula pela sala e, por vezes, pede a um aluno que vá ao quadro apresentar a forma como pensou. É neste contexto que surge, no quadro, o seguinte registo:

$$1{,}5 = \frac{15}{10}$$

Aluno: *Não percebo isso* (aponta para a expressão registada no quadro). *Porque é que um vírgula cinco é igual a quinze sobre dez?*

Professor: *Então vamos ver* (faz no quadro o registo apresentado ao lado). *Contem quantas vezes escrevi 1,5 aqui (indica o registo; os alunos, em coro, contam de um até dez à medida que o professor vai apontando para cada uma das parcelas). Agora façam a conta. Quero saber a que é que é igual a soma destes números todos?* (os alunos efectuam o cálculo recorrendo ao algoritmo da adição).

$$\begin{array}{r} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ +\ 1{,}5 \end{array}$$

Vários alunos: *Dá quinze* (o professor regista 15 abaixo do traço)

Professor: *Então quantas vezes temos que escrever aqui* (aponta para o registo) *1,5 para obter 15?*

Alunos: *Dez.*

Professor: *Certo. Temos que somar dez vezes 1,5 para obter 15. É por isso que 1,5 é igual a 15 sobre 10* (aponta para $1{,}5 = \frac{15}{10}$). *Já percebeste?*

A PREPARAÇÃO DA AULA

O objectivo da aula é que os alunos sejam capazes de relacionar números decimais com números representados por fracções. Para a preparação de uma aula com este objectivo, é importante que o professor leia atentamente as páginas do *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP[1]) em que se explicita o significado de número decimal e de fracção (páginas 10 a 20 e 63 a 67). É, também, vantajoso que consulte o documento *Diferenciação Pedagógica em Matemática*[2] e,

[1] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

[2] Mendes, F. Brocardo, J., Duarte, J. Boavida, A. M., & Delgado, C. (2018). Diferenciação Pedagógica em Matemática. In N. Matias, J.

ainda, o *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guiões para o professor Matemática*[3] onde pode encontrar várias tarefas associadas ao referido objectivo bem como sugestões para o professor.

É essencial ter em conta que a compreensão, pelos alunos, do significado de número decimal depende da sua compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal. Contudo, o seu entendimento das quantidades representadas pelos números decimais, ou seja, a compreensão quantitativa dos números decimais, bem como das várias possibilidades de os representar, está intimamente associado ao desenvolvimento do sentido de fracção. Por esta razão, é fundamental que o professor, ao preparar a aula, pense em proporcionar aos alunos contextos favoráveis para que possam estabelecer conexões entre números decimais e fracções, nomeadamente fracções decimais. É que, embora para muitos adultos seja simples entender que, por exemplo, 0,5 e $\frac{1}{2}$ são representações da mesma quantidade, as crianças têm dificuldade em relacionar os dois diferentes sistemas de representação: a representação sob a forma de fracção e a representação decimal. Não basta dizer-lhes, apenas, que 0,5 e $\frac{1}{2}$ são "a mesma coisa". É necessário que o professor dedique uma atenção explícita ao estabelecimento de conexões entre estes dois sistemas, selecionando tarefas cujo foco seja este e que, pelo menos numa primeira fase, envolva os alunos em actividades de representação não simbólica dos números. Neste âmbito, é útil o uso de modelos de área (por exemplo, uma tabela de 10x10) e/ou de comprimento (por exemplo, uma tira de papel dividida em 10 partes iguais ou uma fita métrica de um metro em que sejam visíveis os traços correspondentes aos decímetros e aos centímetros).

A AULA

A análise do caso apresentado revela que, aparentemente, o professor, quando confrontado com a dúvida do aluno, relacionou a multiplicação com a divisão, pensando: se 1,5 é 15 a dividir por 10, então 10 vezes 1,5 e igual 15. Foi usando este raciocínio, que está correcto, que procurou esclarecer a dúvida do aluno. A questão é se o conseguiu, efectivamente, o que é muito improvável. Com efeito, só é possível fazê-lo se já se souber que o denominador da fracção decimal que representa 1,5 é 10. É muito possível que o aluno desconhecesse este facto antes de ver no quadro a expressão:

$$1{,}5 = \frac{15}{10}$$

O que fazer, perante esta dúvida ou outras do género? Há duas hipóteses de resposta. Uma incide numa alternativa à explicação apresentada pelo professor e outra no caminho que deve ser feito para diminuir a possibilidade de surgirem dúvidas deste tipo.

Focando-nos na primeira resposta. O professor poderia interpelar os alunos questionando-os:

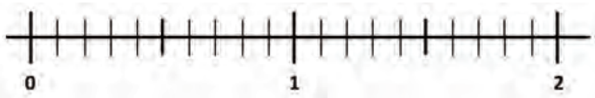
- Como podemos ler 1,5?
- Há outra outras maneiras diferentes de ler este número? Quais?
- Como se leem estes números (por exemplo, $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{15}{10}$)?

O importante é que a partir destas questões ou outras do tipo surjam respostas que permitam evidenciar (a) que 1,5 representa uma unidade e cinco décimas ou dez décimas e cinco décimas ou quinze décimas; (b) que uma fracção cujo denominador é 10 se lê dizendo o número que está no

Duarte, & M. Figueiredo (Orgs.) *Manual Diferenciação Pedagógica em sala de aula para professores do ensino primário* - Volume 1(pp. 131-171). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

[3] Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guião para o professor Matemática.* Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

numerador seguido da palavra “décimos”. Se esta ênfase na leitura dos números e na relação entre o significado das palavras lidas não for suficiente para esclarecer a dúvida, poder-se-á desenhar no quadro uma recta numérica em que cada unidade está dividida em 10 partes iguais.



Em seguida, poder-se-ão questionar os alunos sobre o significado de fracção, sobre o que indica o seu numerador e o seu denominador e incentivá-los a posicionar na recta números sugestivos, quer na representação decimal quer como fracção, relacionando-os: por exemplo, $\frac{1}{10}$; 0,5; $\frac{1}{2}$; dez décimas; $\frac{10}{10}$; $\frac{11}{10}$; 1 unidade e cinco décimas; 1,5; $\frac{15}{10}$.

Para que o objectivo de uma aula possa ser relacionar números decimais com números representados por fracções, previamente a ela o professor e os alunos têm que fazer um caminho que passa por colocar a ênfase (a) na compreensão do conceito de fracção; (b) na representação tanto icónica como simbólica de fracções; (c) na expansão do conhecimento dos alunos sobre como funciona o sistema de numeração decimal quando se usam números inteiros, de modo a integrarem nele os números decimais percebendo como se relacionam e representam, unidades, décimas, centésimas e milésimas; e (d) na leitura de números decimais e em diversas formas de os representar tendo em conta a estrutura deste sistema (por exemplo, 7,38=7+0,3+0,006; 7,38 é 7 mais 3 décimas mais 8 centésimas; 7,38 é 6 mais 13 décimas mais 8 centésimas; ...).

Tendo sido feito este caminho, pode propor-se aos alunos a seguinte tarefa:

A figura representa uma régua cujo comprimento é um metro.

1. *Posiciona na régua os números* $\frac{3}{10}$ *e 0,3.*
2. *Usa a régua para representar* $\frac{3}{5}$ *sob a forma de número decimal.*

O professor pode escrever o enunciado no quadro. No entanto, é vantajoso que os alunos tenham ao seu dispôr uma folha de papel com a representação da régua que consta da figura. Uma alternativa, embora não tão adequada, é desenhar a figura no quadro.

É importante que o professor dê aos alunos algum tempo para tentar resolver a tarefa, por eles próprios, e acompanhar o trabalho que realizam tendo em vista compreender o modo como estão a pensar e a identificar possíveis dificuldades. Pretende-se que não respondam à segunda questão através do mero cálculo do quociente entre e 3 e 5, pelo que é importante incentivá-los a usar a régua para pensar sobre ela. Se surgirem dificuldades, pode focar a sua atenção sobre as unidades de medida de comprimento e como se relacionam.

Em seguida, o professor pode convidar alguns alunos para ir ao quadro explicar como pensaram. Nesta altura, é importante que aí esteja desenhada a régua para representarem nela o que foi pedido. Através desta via, dá-se ênfase à ideia de que $\frac{3}{10}$ e 0,3 representam a mesma quantidade e o mesmo acontece com $\frac{3}{5}$ e 0,6.

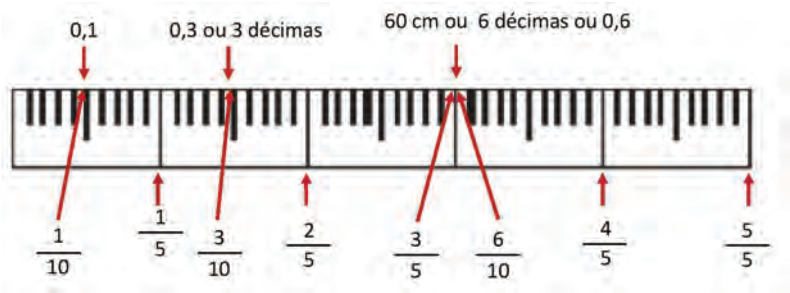
Durante a partilha e análise dos raciocínios dos alunos, o professor poderá colocar questões do tipo:

– Como sabes que aí é $\frac{3}{10}$? Onde está $\frac{1}{10}$? E $\frac{3}{5}$? Qual é a unidade?

– Porque ligaste 0,3 e $\frac{3}{10}$ ao mesmo ponto da régua? Porque é que $\frac{3}{5}$ e 0,6 não podem estar ligados a pontos diferentes da régua?

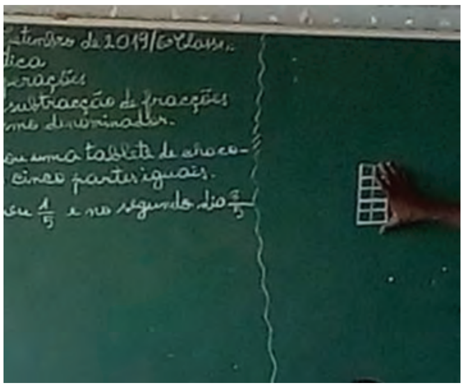
- Saber onde está $\frac{3}{10}$ ajuda a descobrir onde está $\frac{6}{10}$? Porquê?
- Saber que a régua mede 1 metro, pode ajudar a descobrir onde está 0,3? E a representar $\frac{3}{5}$ por um número decimal? Porquê?

É desejável que, através da partilha de ideias, o registo no quadro que vá aproximando, progressivamente, de algo semelhante ao representado na figura.



No final, o professor deverá registar no quadro igualdades entre números, assinalados na régua, que representem as mesma quantidades e colocar, ainda, outras questões não directamente relacionadas com a tarefa proposta. Por exemplo, qual é a relação que há entre $\frac{3}{10}$ e $\frac{3}{5}$? Mostra-me como pensaste usando a régua.

NÚMEROS E OPERAÇÕES



ADIÇÃO E SUBTRACÇÃO DE FRACÇÕES COM O MESMO DENOMINADOR

Objectivo – Compreender como se adicionam e subtraem números representados por fracções com o mesmo denominador.

Caso

Numa sala da 6ª classe, o professor escreve no quadro o seguinte enunciado: *A Isabel comprou uma tablete de chocolate que dividiu em cinco partes iguais. No primeiro dia comeu* $\frac{1}{5}$ *e no segundo dia* $\frac{3}{5}$.

Professor: *Leiam o que está no quadro* (aguarda). *Perceberam? (*ouvem-se vários "sins"). *Como se lê este número (*aponta para $\frac{1}{5}$*)? (há alunos que dizem um quinto). E este* (aponta para $\frac{3}{5}$)*?* (há alunos que dizem três quintos). *Um quinto e três quintos. O que é que nós sabemos?* (um aluno responde correctamente). *Muito bem. Agora queremos saber a quantidade de chocolate que a Isabel comeu nos dois dias. Vou desenhar no quadro a tablete que ela comprou* (desenha uma tabela com duas colunas e cinco linhas). *Que operação vamos usar?* (aguarda). *É a adição, sim. Vamos marcar aqui com uma cruz o chocolate que a Isabel comeu no primeiro dia e com um círculo o que comeu no segundo dia. Olhem como vou fazer* (na figura está o que ficou representado no quadro). *Se comeu um quinto no primeiro dia* (aponta para a linha da tabela em que há cruzes) *e três quintos no segundo* (aponta para as linhas que têm círculos)*, ao todo comeu quatro quintos* (escreve no quadro $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$). *Perceberam?* (ouve-se "sim" e "não"). *Quem não percebeu?* (vários alunos manifestam-se). *O que é que não perceberam?*

Um aluno: *Porque é que são quatro quintos? As cruzes mais os círculos são oito!*

Professor: *Olhem para o desenho. Um, dois, três, quatro (*vai apontando para cada uma das linhas da tabela em que há cruzes ou círculos*). Quatro quintos. Cada uma destas partes é um quinto. Tenho outra pergunta: depois da Isabel ter comido quatro quintos de chocolate, ainda ficou com algum chocolate?* (ouvem-se vários "sins") *Então que quantidade de chocolate sobrou?* (alguns alunos dizem "dois bocados", outros "um bocado" e outros "um quinto")*. Sobrou um quinto da tablete. Aqui não há cruzes nem círculos* (aponta para a linha da tabela sem cruzes nem círculos e regista no quadro: $1-\frac{4}{5}=\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$).

A aula prossegue com a apresentação, pelo professor, das regras para adicionar e subtrair fracções com o mesmo denominador seguida da resolução de exercícios de aplicação destas regras.

A PREPARAÇÃO DA AULA

O caso apresentado ilustra uma situação em que o professor pretende que os alunos compreendam como se adicionam e subtraem números representados por fracções com o mesmo denominador.

Quando se prepara uma aula com esta intenção há que ter em atenção dois aspectos: (a) que características deve ter a tarefa com que irei iniciar a abordagem deste tópico? (b) que recursos irei usar ou disponibilizar para apoiar a sua resolução? Aparentemente, antes da aula o professor referido no caso pensou nestes aspectos. Com efeito, seleccionou um problema ligado à vida do dia-a-dia cuja resolução remete para a adição e subtracção de fracções com o mesmo denominador. Além disso, desenhou no quadro um rectângulo dividido em partes iguais (a tabela) e usou esta representação icónica para chegar às representações simbólicas $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$ e $1-\frac{4}{5}=\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$ em que se apoiou para apresentar as regras para adicionar e subtrair fracções com o mesmo denominador.

A análise do caso levanta, no entanto, duas questões. A primeira relaciona-se com o enunciado do problema. A segunda diz respeito ao recurso usado para apoiar a resolução. A observação da acção do professor revela que se preocupou com o entendimento, pelos alunos, deste enunciado. Não poderá ter permanecido, contudo, alguma ambiguidade que pode dificultar um entendimento profundo da situação? A leitura do enunciado permite saber que Isabel comeu $\frac{1}{5}$ de uma tablete de chocolate num dia e que no dia seguinte comeu $\frac{3}{5}$. Mas $\frac{3}{5}$ de quê? Da tablete toda (que já não tinha!) ou $\frac{3}{5}$ da quantidade que lhe restou?

Para interpretar correctamente o significado de uma fracção num determinado contexto é essencial conhecer a unidade (ou o todo) com que se está a trabalhar, como se salienta no *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primári*o (MMPEP[1]), secção *Números Racionais e Operações* (páginas 63-99) e *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guiões para o professor Matemática*[2] (páginas 16-20). Nestes documentos sublinha-se que compreender o conceito de fracção passa, antes de mais, por entender que as fracções representam também relações entre números expressos pelo numerador e pelo denominador e que o denominador indica o número de partes em que a unidade foi dividida. Esta ideia-chave relaciona-se directamente com a segunda questão atrás referida. O desenho que o professor fez no quadro terá sido o mais adequado à situação descrita no problema?

Este desenho representa um rectângulo (a unidade) dividido em dez partes iguais. Naturalmente que é possível assinalar nele $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ da unidade, tal como mostra a acção do professor. No entanto, se se estão a considerar quintos, ter uma figura dividida em dez partes não faz grande sentido. Acima de tudo, esta divisão dificulta que os alunos que ainda não entenderam que fracções são relações entre quantidades, compreendam esta ideia. É muito provável que estes alunos fiquem com interrogações do tipo de uma das referidas no caso: "Porque é que são quatro quintos? As cruzes mais os círculos são oito!"

A AULA

Consideremos uma aula cujo objectivo é idêntico ao do caso apresentado e cujo ponto de partida é o problema aí referido. O professor pode começar por registar no quadro o início do enunciado (sem as questões) e, em seguida, dialogar com os alunos tendo em vista a compreensão da situação. Dado o objectivo da aula, é essencial que estes entendam que quando se refere a quantidade de chocolate comida em cada dia, a unidade a considerar é sempre a tablete inteira. Entre as questões a colocar nesta fase estão: (a) A Isabel comeu um quinto de quê?; (b) A Isabel comeu três quintos de

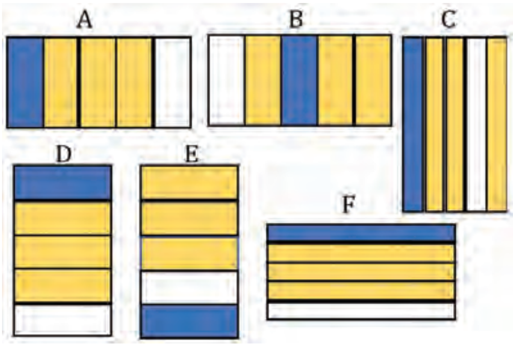
[1]Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Manual de Matemática para Professores do Ensino Primário* (MMPEP). Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

[2]Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J. & Duarte, J. (2017). *Kit Pedagógico para Língua Portuguesa e Matemática, Guião para o professor Matemática*. Projecto Aprendizagem para Todos - Ministério da Educação: República de Angola.

quê?; (c) O que que quer dizer um quinto de "uma coisa"?;(d) O que significa três quintos de "uma coisa"? No final deste diálogo, há vantagens em que o enunciado registado no quadro seja reescrito de modo a evidenciar qual é o todo. Por exemplo: *A Isabel comprou uma tablete de chocolate que dividiu em cinco partes iguais. No primeiro dia comeu* $\frac{1}{5}$ ***da tablete*** *e no segundo dia* $\frac{3}{5}$ ***de toda esta tablete***. Em seguida, o professor apresenta a primeira ou ambas as questões do problema e regista-as, também, no quadro: (a) Que quantidade de chocolate comeu a Isabel nos dois dias?; (b) Sobrou algum chocolate? Se sim, que quantidade?

Um aspecto fundamental é dar tempo aos alunos para pensarem sobre estas questões e uma boa opção é indicar que se foquem, sobretudo, na primeira. Caso não estejam habituados a recorrer, por sua iniciativa, a representações não simbólicas para resolver problemas (por exemplo, fazer desenhos), é essencial sugerir-lhes que o façam ou, então, desenhar no quadro uma figura (por exemplo, um rectângulo) sem estar dividida em partes, informando-os de que representa a tablete. Em alternativa, podem-se dar tiras rectangulares de papel para representar a tablete.

Enquanto os alunos trabalham entre si, é importante que o professor circule pela sala de modo a perceber o que estão a fazer e a identificar possíveis dificuldades. É vantajoso que os alunos tenham liberdade para representar a tablete de chocolate como quiserem. O que se pretende é que entendam que se o enunciado refere quintos, há necessidade de ter cinco quintos para obter o todo e, por isso, caso tenham desenhado, por exemplo, um rectângulo ou um círculo para representar a tablete, dá jeito que a figura seja dividida em cinco partes equivalentes. Para os ajudar a ultrapassar dificuldades sem lhes dizer como devem proceder, devem incentivar-se a pensar no no que representa o numerador e o denominador de uma fracção, no que significa $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ e a usar todo este conhecimento para representar no desenho a parte da tablete de chocolate que Isabel comeu em cada dia.



Passado o tempo necessário para que a maioria dos alunos terem resolvido ou, pelo menos, tentado resolver o problema, é importante convidar alguns para ir ao quadro apresentar as suas resoluções. Os alunos a seleccionar para este fim devem ter usado estratégias diferentes. Por exemplo, caso tenha havido liberdade para desenharem a tablete como entenderem, se surgirem rectângulos e círculos convém que estas representações sejam partilhadas e analisadas colectivamente pois esta atividade pode contribuir para reforçar a ideia de que o que importa é que a unidade esteja dividida em cinco partes e que estas partes sejam equivalentes. Mesmo que o professor lhes tenha dito para representar a tablete por, por exemplo, um rectângulo ou até que o tenha desenhado no quadro, há várias possibilidades de aí representar as quantidades de chocolate que Isabel comeu em cada um dos dias. Algumas destas possibilidades constam da figura em que se usou a cor azul e a cor amarela para indicar, respectivamente, a quantidade referente ao primeiro dia e ao segundo dia ($\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ da tablete).

É provável que não haja alunos a recorrer a representações do tipo C, E ou B. Durante a partilha e discussão das estratégias de resolução, o professor poderá apresentá-las, questionar os alunos se se poderão usar para resolver o problema e o que significam. É a análise de representações icónicas do tipo A, B, C, D, E ou F, ou de outras do género a que os alunos recorrem, que favorece a atribuição de sentido à regra que permite adicionar fracções com o mesmo denominador. Em primeiro lugar porque permite visualizar bem que a fracção $\frac{3}{5}$ representa uma quantidade que se obtém repetindo três vezes a quantidade que corresponde à fracção unitária $\frac{1}{5}$. Em segundo lugar, porque evidencia que quando juntamos um quinto com três quintos, obtemos quatro quintos, à semelhança do que acontece quando juntamos, por exemplo, um berlinde com três berlindes. Em terceiro lugar, porque permite reforçar que o denominador de uma fracção pode ser pensado como a palavra que dá o nome a cada uma das partes em que a unidade foi dividida e que o numerador enumera, ou conta, quantas destas partes tem a fracção (ver MMPEP, página 79). Se esta ideia estiver bem compreendida pelos alunos, é natural que entendam porque é para adicionar $\frac{1}{5}$ com $\frac{3}{5}$ se adicionam os numeradores, mantendo o denominador.

Toda a actividade desenvolvida para responder à primeira questão do problema, a par da observação de representações do tipo das A, B, C, D, E ou F, permite visualizar que na tablete (a unidade) há uma parte em cinco que não está pintada, pelo que sobrou $\frac{1}{5}$ de toda a tablete. A partir daqui o professor poderá encorajar os alunos a dizer, por palavras suas, como se deverá proceder para subtrair fracções com o mesmo denominador. Antes de apresentar, de um modo mais formal, as regras para a adição e subtracção de fracções com o mesmo denominar, convém propor aos alunos mais exercícios e problemas que envolvam este tipo de fracções e incentivá-los a resolvê-los usando tanto representações icónicas como simbólicas.

“Capacitação dos quadros da educação e ensino rumo à melhoria da qualidade de ensino-aprendizagem”

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO